UNIVERSITÉ D'ANGERS **ANNÉE 2023-2024**
U.F.R. SCIENCES

L1 MPECI
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$
Feuille de TD n°1

Exercice 1. Compléter la preuve de la proposition 1.1 et du corollaire 1.2 dans le poly.

Exercice 2. Établir les formules ou assertions suivantes par récurrence.

1) $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2) $1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$.
3) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
4) 3 divise $n^3 - n$.
5) $2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
6) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.
7) Tout produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$.
8) Quels que soient $k, n \in \mathbb{N}$, $(k + 1)^n - kn - 1$ est divisible par k^2.

Exercice 3. Considérer la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ pour tout $n \geq 1$.

(1) Calculer u_3, u_4, u_5, puis deviner une formule générale pour u_n.
(2) Démontrer la formule par une récurrence d'ordre deux.

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + u_0 + \cdots + u_n$ pour tout $n \geq 1$.

(1) Calculer u_1, u_2, u_3, puis deviner une formule générale pour u_n.
(2) Démontrer la formule par une récurrence forte.

Exercice 5. L'argument par récurrence suivant est-il correct ?

On note $\forall n \geq 1$, P_n la proposition suivante : Si une trousse contient n stylos, alors les n stylos sont de la même couleur.

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1$, P_n est vraie.

Initialisation : Pour $n = 1$, P_1 est vraie puisqu'il n'y a qu'un stylo.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie, montrons que P_{n+1} l'est aussi.

Prenons une trousse qui a $n + 1$ stylos, on en enlève 1, il en reste donc n qui sont de la même couleur par l'hypothèse de récurrence. On en enlève encore 1 dans la trousse puis on remet le premier : il y a à nouveau n stylos : ils sont donc de la même couleur. Donc le premier stylo enlevé a la même couleur que les n autres.

Donc P_{n+1} est vraie.

Exercice 6. Dans une division euclidienne entre entiers naturels, quels peuvent être le diviseur et le quotient lorsque le dividende est 2020 et le reste 335 ?

Exercice 7. Déterminer les entiers naturels a et b de somme 2020 et tels que la division euclidienne de a par b donne 4 pour quotient et pour reste 300.

Exercice 8. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, le nombre $A_n = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 9. En remarquant que $27 \cdot 37 + 1 = 1000 = 77 \cdot 13 - 1$, déterminer les restes des divisions du nombre $N = 742371149$ par 37 et par 13.

Exercice 10. Si le dividende est 1412 et le quotient 16, que peuvent valoir le diviseur et le reste ?

Exercice 11 (Sommes et produits)**.** Alice et Bruno remplissent des tableaux carrés dont les lignes sont numérotées de haut en bas et les colonnes de gauche à droite. Dans son tableau Alice écrit à chaque intersection d'une ligne et d'une colonne la somme de leurs numéros ; quant à Bruno, il y écrit le produit de ces numéros. Alice et Bruno calculent la somme de tous les nombres qu'ils ont écrits (sans compter les num éros des lignes et colonnes) et obtiennent le même résultat. Le tableau d'Alice comporte 99 lignes (et 99 colonnes) ; combien celui de Bruno en compte-t-il ?

Exercice 12. Soient $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Montrer que d divise a et b si et seulement si d divise $ax + by$ quels que soient $x, y \in \mathbb{Z}$.

Exercice 13 (Fonction indicatrice d'Euler)**.** Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n et premiers avec n.

1. Calculer $\phi(n)$ pour $n \leq 10$, puis $\phi(p)$ et $\phi(p^d)$ pour p premier.
2. Etablir l'égalité $n = \sum_{d|n} \phi(d)$ en remarquant que

$$\left\{ \frac{i}{n} \ : \ 1 \leq i \leq n \right\} = \bigcup_{d|n} \left\{ \frac{j}{d} \ : \ j \wedge d = 1, 1 \leq j \leq d \right\}.$$

Exercice 14. Combien 10! admet-il de diviseurs ?

Exercice 15. Soit $k \geq 2$. Montrer qu'une somme de k entiers impairs consécutifs n'est jamais un nombre premier.

Exercice 16. Trouver tous les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 - y^2 = 2019$.

Exercice 17. Montrer que les carrés parfaits sont les entiers dont les diviseurs positifs sont en nombre impair.