UNIVERSITÉ D'ANGERS ANNÉE 2023-2024
U.F.R. SCIENCES

**L1 MPECI**
**Arithmétique dans $\mathbb{Z}$**
**Feuille de TD n°2**

**Exercice 1.** Déterminer les entiers naturels $a, b \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} a+b=182 \\ a \wedge b = 13 \end{cases}.$$

Etant donné des entiers $n \geq 1$ et $d \geq 1$, combien le système

$$\begin{cases} a+b=n \\ a \wedge b = d \end{cases}$$

admet-il de solutions $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ?

**Exercice 2.** Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a}{6} \in \mathbb{Z}.$$

**Exercice 3.** Soit $n = n_p ... n_1 n_0$ l'écriture décimale d'un $n \in \mathbb{N}$. Démontrer les critères de divisiblité de $n$ par $d$ suivants.

(1) $d = 2$ : $n_0 = 0, 2, 4, 6, 8$.

(2) $d = 3$ : $n_0 + ... + n_p$ est divisible par 3.

(3) $d = 5$ : $n_0 = 0, 5$.

(4) $d = 9$ : $n_0 + ... + n_p$ est divisible par 9.

(5) $d = 11$ : $n_0 - n_1 + n_2 - ...$ (somme alternée) est divisible par 11.

**Exercice 4.** Sur tout billet de banque en euros figure un code de 11 chiffres précédé d'une lettre de $A$ à $Z$ ; le remplacement de cette lettre par son rang donne un nombre (à 12 ou 13 chiffres) dont le reste dans la division par 9 doit valoir 8.

(1) Que dire d'un billet affichant le code $U01308937097$ ?

(2) Trouver le dernier chiffre $x$ du code $S0216644810x$ d'un billet authentique.

**Exercice 5.**

(1) Écrire en base 2, en base 5 puis en base 12 les nombres décimaux 23 et 54.

(2) Quel est le nombre dont l'écriture en base 4 est 321 ?

**Exercice 6.** Effectuer dans le système de numération à base 2 les opérations suivantes : $110110 + 11011$, $111101 - 10011$, $11001 \times 1011$, $10000111 : 11011$

**Exercice 7.** L'entier $N$ qui s'écrit 21 en décimal peut-il s'écrire 27 dans une autre base ? L'entier $N$ qui s'écrit 12551 en décimal peut-il s'écrire 30407 dans une autre base ?

**Exercice 8.** Un nombre de trois chiffres s'écrit xyz dans le système à base 7, et zyx dans le système à base 9. Quel est ce nombre ?

**Exercice 9.** Sachant que l'on a dans un certain système de numération : $36 + 45 = 103$, calculer, dans ce système, le produit $36 \times 45$.

**Exercice 10.** Dans quel système de numération a-t-on l'égalité : $122 \times 103 = 13121$ ?

**Exercice 11.** Que vaut le nombre binaire 10100011 en octal ? en hexadécimal ?

**Exercice 12.** Montrer que, quelle que soit la base, le nombre 1331 est toujours le cube d'un entier.

**Exercice 13.** Convertir 1111, 8888 et 9999 de la base dix à la base deux.

**Exercice 14** (Algorithme d'Euclide, solution minimale)**.** Soient $a, b$ deux entiers tels que $a > b > 0$ et $a \wedge b = 1$. Pour $k = 0, 1$, on pose $r_0 = a$, $r_1 = b$, $(u_0, v_0) = (1, 0)$, $(u_1, v_1) = (0, 1)$.

Pour chaque $k \geq 1$, si $r_k > 0$, on effectue la division euclidienne de $r_{k-1}$ par $r_k$ ; le quotient est $q_k$ et le reste est $r_{k+1}$ :

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1},\ 0 \leq r_{k+1} \leq r_k - 1.$$

On définit $(u_{k+1}, v_{k+1})$ par

$$u_{k-1} = q_k u_k + u_{k+1} \text{ et } v_{k-1} = q_k v_k + v_{k+1}.$$

La suite de nombres naturels $(r_k)$ est strictement décroissante. Il y a donc un $n \in \mathbb{N}$ tel que $r_{n+1} = 0$. On a ainsi $au_n + bv_n = r_n = 1$.

Pour $k \geq 0$, on pose

$$t_k = r_k u_{k+1} - r_{k+1} u_k \text{ et } w_k = r_k v_{k+1} - r_{k+1} v_k.$$

(1) Montrer que $q_n \geq 2$.
(2) Montrer que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $u_k u_{k+1} \leq 0$ et $v_k v_{k+1} \leq 0$, avec inégalité stricte lorsque $k \geq 2$.
(3) Calculer $t_0$ et $w_0$ en fonction de $a = r_0$ et $b = r_1$.
(4) Montrer que, pour tout $k \geq 0$, $t_k = -t_{k+1}$, $w_k = -w_{k+1}$.
(5) En déduire que $t_0 = (-1)^n t_n$, $w_0 = (-1)^n w_n$, puis que $|u_{n+1}| = b$ et $|v_{n+1}| = a$.
(6) Montrer que $|u_{n+1}| = q_n|u_n| + |u_{n-1}|$ et $|v_{n+1}| = q_n|v_n| + |v_{n-1}|$ ; en déduire que
$$2|u_n| \leq b \text{ et } 2|v_n| \leq a.$$
(7) On suppose que $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $ax + by = 1$. Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$$x = u_n - kb \text{ et } y = v_n + ka.$$
Montrer que $|u_n| \leq |x|$ et $|v_n| \leq |y|$.
(8) En déduire que $|u_n| + |v_n| \leq |x| + |y|$, avec égalité si et seulement si $k = 0$.