Université d'Angers **2023-2024**
U.F.R. SCIENCES SANTIAGO TORO

L1 LICENCE DE MATHÉMATIQUES
ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES
Feuille de TD n°1

Exercice 1.
Dans $\mathbb{C}[x]$, considérons les polynômes $A(X) = X^3 + iX + i$ et $B(X) = X^2 + X + i$ et les trois polynômes

$$\begin{cases} P(X) = 2A(x) - XB(x) \\ Q(X) = (X+i)A(X) + (X-i)B(X) \\ R(X) = (X-2i+1)A(X) - (X^2 - 2iX + 2i)B(X) \end{cases}$$

Calculer P, Q, R et préciser leurs degrés.

Correction.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - x^2 + ix + 2i \\ Q(x) &= x^4 + (1+i)x^3 + x^2 - (1-i)x \\ R(x) &= 4 + i \end{aligned}$$

En plus, $\deg P(x) = 3$, $\deg Q(x) = 4$ et $\deg R(x) = 0$.

Exercice 2.
Soient $A = (X+1)^3$ et $B = (1-X)^3$.

(2.1) Que valent les degrés de A et B ?

(2.2) Sans calcul, que peut-on dire de $\deg(A+B)$ et de $\deg(AB)$?

(2.3) Calculer $A+B$ et $A-B$ et leurs degrés.

Correction.
Les degrés de A et B valent 3. Le degré de la somme $A+B$ vaut 2 et le degré de $A-B$ vaut 3 (sans faire aucun calcul on peut juste dire que le degré, en chaque cas, est inférieur ou égal à 3).

$$\begin{aligned} (A+B)(X) &= 6X^2 + 2 \\ (A-B)(X) &= 2X^3 + 6X \end{aligned}$$

Exercice 3.
Considérons les polynômes $A = \bar{2}X^3 - \bar{3}X + \bar{5}$ et $B = \bar{3}X^4 - \bar{3}X^2 + \bar{2}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Calculer $A+B$ et AB et préciser leurs termes dominants. Que peut-on remarquer ? Expliquer.

Correction.
On peut calculer $A+B$ et AB comme d'habitude et après réduire les coefficients de chaque résultat modulo 6. On trouve que :

$$(A+B)(X) = 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 3X + 1$$

et

$$(AB)(X) = 3X^5 + 3X^4 + X^3 + 3X^2 + 4$$

On peut remarquer que le degré du produit AB n'est pas forcement la somme de degrés de A et B. Ceci est du au fait que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas un anneau d'intégrité (6 n'est pas premier).

Exercice 4.

(4.1) Calculer le produit $(1+X)(1+X^2)(1+X^4)$

(4.2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=0}^{n}(1+X^{2^k}) = 1 + X + X^2 + X^3 + \cdots + X^{2^{n+1}-1}.$$

Correction.

(1) Un calcul simple montre que

$$(1+X)(1+X^2)(1+X^4) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7$$

(2) La initialisation de la récurrence correspond au calcule du premier item. On suppose alors que pour $n > 1$ fixé on a

$$\prod_{k=0}^{n}(1+X^{2^k}) = 1 + X + X^2 + X^3 + \cdots + X^{2^{n+1}-1} = \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} X^i.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n+1}(1+X^{2^k}) &= \left(\prod_{k=0}^{n}(1+X^{2^k})\right)(1+X^{2^{n+1}}) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} X^i\right)(1+X^{2^{n+1}}) \qquad \text{hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} X^i + X^{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} X^i \\
&= \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} X^i + \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} X^{i+2^{n+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} X^i + \sum_{j=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} X^j \\
&= \sum_{i=0}^{2^{n+2}-1} X^i
\end{aligned}$$

Exercice 5.
Vérifier que $(X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1) = X^5 + X + 1$; en déduire des factorisations de $X^5 + X - 1$ et de 100009.

Correction.
La vérification est facile. Pour la première factorisation on pose $Y = -X$. Alors,

$$\begin{aligned} X^5 + X - 1 = -(Y^5 + Y + 1) &= -(Y^3 - Y^2 + 1)(Y^2 + Y + 1) \\ &= -(-X^3 - X^2 + 1)(X^2 - X + 1) \\ &= (X^3 + X^2 - 1)(X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

Par ailleurs notons que

$$100009 = 10^5 + 10 - 1 = (10^3 + 10^2 - 1)(10^2 - 10 + 1) = (10^3 + 9 \cdot 10 + 9)(9 \cdot 10 + 1) = (1099)(91)$$

Exercice 6.
Pour $A = X^3 - 2X + 1$, $P = X + 1$ et $Q = X^2$, calculer $A(P)$, $P(A)$, $A(Q)$, $Q(A)$.

Correction.
Dans chaque cas on trouve :

$$\begin{aligned} A(P(X)) &= X^3 + 3X^2 + X \\ P(A(X)) &= X^3 - 2X + 2 \\ A(Q(X)) &= X^6 - 2X^2 + 1 \\ Q(A(X)) &= X^6 - 4X^4 + 2X^3 + 4X^2 - 4X + 1 \end{aligned}$$

Exercice 7.
Soient $P_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $P_n = (1 + nX)P_{n-1}$.

(7.1) Calculer P_1, P_2 et P_3.

(7.2) Quel est le coefficient dominant de P_n?

(7.3) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(0)$.

Correction.

(1) On commence par calculer P_1 :

$$P_1(X) = (1 + 1X)P_0 = 1 + X$$

En utilisant P_1 on calcule P_2 :

$$P_2(X) = (1 + 2X)P_1 = (1 + 2X)(1 + X) = 1 + 3X + 2X^2$$

Enfin,

$$P_3(X) = (1 + 3X)P_2 = (1 + 3X)(1 + 3X + 2X^2) = 1 + 6X + 11X^2 + 6X^3$$

(2) Le coefficient dominant de P_n est $(1)(2)(3)\cdots(n-1)(n) = n!$.

(3) Il suffit de noter que

$$P_n(x) = (1+nx)(1+(n-1)x)(1+(n-2)x)\cdots(1+2x)(1+x)$$

Alors,

$$\begin{aligned} P_n(1) &= (1+n)(1+n-1)(1+n-2)(1+n-3)\cdots(1+2)(1+1) \\ &= (n+1)(n)(n-2)(n-3)\cdots(3)(2)(1) = (n+1)! \end{aligned}$$

De même, il est facile de constater que $P_n(0) = 1$.

Exercice 8.
Faire la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{C}[X]$:

A	B
8	3
$2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$	$X^2 - 3X + 1$
$X^3 - 3X^2 - X - 1$	$3X^2 - 2X + 1$
$X^3 - X^2 - X$	$X - 1 + 2i$

Correction.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2X^4 & -3X^3 & +4X^2 & -5X & +6 & X^2-3X+1 \\ \cline{6-6} -2X^4 & +6X^3 & -2X^2 & & & 2X^2+3X+11 \\ \cline{1-3} & 3X^3 & +2X^2 & -5X & & \\ & -3X^3 & +9X^2 & -3X & & \\ \cline{2-4} & & 11X^2 & -8X & +6 & \\ & & -11X^2 & +33X & -11 & \\ \cline{3-5} & & & 25X & -5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} X^3 & -3X^2 & -X & -1 & 3X^2-2X+1 \\ \cline{5-5} -X^3 & +\frac{2}{3}X^2 & -\frac{1}{3}X & & \frac{1}{3}X - \frac{7}{9} \\ \cline{1-3} & -\frac{7}{3}X^2 & -\frac{4}{3}X & -1 & \\ & \frac{7}{3}X^2 & -\frac{14}{9}X & +\frac{7}{9} & \\ \cline{2-4} & & -\frac{26}{9}X & -\frac{2}{9} & \end{array}$$

Exercice 9.
Soit $P[x] \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P \circ P - X$ est divisible par $P - X$.

> **Rappel 1.** $(a^n - b^n) = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}$

Correction.
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme. On commence par considérer le polynôme $P \circ P - P$:

$$\begin{aligned} P \circ P - P &= \sum_{k=0}^{n} a_k P^k - \sum_{k=0}^{n} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (P^k - X^k) = \sum_{k=1}^{n} a_k (P^k - X^k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k (P - X) \sum_{i=1}^{k} P^{k-i} X^{i-1} \\ &= (P - X) \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=1}^{k} P^{k-i} X^{i-1} \end{aligned}$$

On en déduit que $P - X$ divise $P \circ P - P$ et aussi $P \circ P - X = P \circ P - P + (P - X)$.

Exercice 10.
Quels sont les polynômes de degré 4 congrus à X modulo $X^2 + 1$?

Correction.
Soit P un polynôme de degré 4 tel que $P(X) \equiv X (\text{mod } X^2 + 1)$. Alors il existe Q tel que

$$P(X) = (X^2 + 1) Q(X) + X$$

Comme le degré de P est 4 alors le degré de Q doit être égal à 2 donc on peut écrire $Q(X) = aX^2 + bX + c$ où $a \neq 0$. En remplaçant on obtient

$$\begin{aligned} P(x) &= (X^2 + 1)(aX^2 + bX + c) + x \\ &= aX^4 + bX^3 + cX^2 + aX^2 + bX + c + x \\ &= aX^4 + bX^3 + (c + a)X^2 + (b + 1)X + c \end{aligned}$$

On en déduit que les polynômes de degré 4 qui sont congruents à X modulo $X^2 + 1$ sont tous les polynômes de la forme

$$P(X) = aX^4 + bX^3 + (c + a)X^2 + (b + 1)X + c, \qquad \text{où } a \neq 0.$$

Exercice 11.
Trouver les réels a et b pour que $X^2 - 2X + 1$ divise $X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2$.

Correction.
La division euclidien de $P(X) = X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2$ par $Q(X) = X^2 - 2X + 1$ donne :

$$
\begin{array}{l|l}
X^5+X^4+aX^3+bX^2+5X-2 & X^2-2X+1 \\
\cline{2-2}
-\left(X^5-2X^4+X^3\right) & X^3+3X^2+(a+5)X+(2a+b+7) \\
\cline{1-1}
\qquad 3X^4+(a-1)X^3+bX^2+5X-2 & \\
\quad -\left(3X^4-6X^3+3X^2\right) & \\
\cline{1-1}
\qquad (a+5)X^3+(b-3)X^2+5X-2 & \\
\quad -\left((a+5)X^3-(2a+10)X^2+(a+5)X\right) & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad (2a+b+7)X^2-aX-2 & \\
\qquad -\left((2a+b+7)X^2-(4a+2b+14)X+(2a+b+7)\right) & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad (3a+2b+14)X \ + \ (-2a-b-9) &
\end{array}
$$

Alors, P est divisible par Q lorsque $a \neq 5$, $2a+b+7 \neq 0$ et

$$
\begin{aligned}
3a+2b+14 &= 0 \\
-2a-b-9 &= 0
\end{aligned}
$$

Ce dernière système des équations admet les solutions $a=-4$ et $b=-1$.

Exercice 12.
Les restes des divisions euclidiennes d'un polynôme A par $X-1$ et $X-2$ sont respectivement 4 et 5. Quel est le reste de la division euclidienne de A par $(X-1)(X-2)$?

Exercice 13.
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ divisibles par leur dérivé P' pour

(13.1) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et en déduire le cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

(13.2) pour $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ quelconque grâce au développement de Taylor.

Exercice 14.
Déterminer les racines complexes du polynôme $P = X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ et en déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 15.
Déterminer a et b dans $\mathbb{C}$ de manière que les racines de $P = X^4-26X^3+231X^2+aX+b$ soient en progression arithmétique.