Université d'Angers **2023-2024**
U.F.R. SCIENCES SANTIAGO TORO

L1 LICENCE DE MATHÉMATIQUES
ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES
Feuille de TD n°3

Exercice 1.

(1) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}(X)$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) \in \mathbb{R}$.

(2) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}(X)$ tels que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $P(z) \in \mathbb{R}$.

(3) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}(X)$ tels que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $P(z) \in \mathbb{Q}$.

(4) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}(X)$ tels que pour tout $z \in \mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$, $P(z) \in \mathbb{S}^1$.

Correction.

(1) Il est clair que si $P(z) = a$ avec a une constante réelle alors $P(z) = a \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Si P n'est pas constante, alors le polynôme

$$Q(X) = P(X) - i$$

n'est pas constante aussi. D'après le Théorème d'Alembert-Gauss (tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine) il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$Q(\alpha) = P(\alpha) - i = 0$$

Ceci équivaut à $P(\alpha) = i \notin \mathbb{R}$ et donc ce n'est pas vrai que $P(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Donc, les polynômes tels que $P(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$ ce sont les polynômes constantes avec une constante réelle.

(2) Les polynômes à coefficients réelles sont bien des solutions. De plus, si $P \in \mathbb{C}[X]$ est tel que $P(X) \in \mathbb{R}$ alors

$$¶(X) = \overline{P(X)} = \overline{P}(X)$$

Ainsi, $(P - \overline{P})(X) = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}$. Ceci implique que P est égal à $\overline{P}$ ($\overline{P}$ est le polynôme obtenue à partir de P en prenant la conjuguée de ces coefficients). Alors si on écrit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ on a que

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} X^i$$

et par identification $a_i = \overline{a_i}$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, n$. Or, si z est un nombre complexe égal à sa conjuguée alors $\mathrm{Im}(z) = 0$ et donc $z \in \mathbb{R}$. On en déduit que $P \in \mathbb{R}[X]$.

(3)

> **Rappel 1.** *Si $z \in \mathbb{C}$ alors $z\overline{z} = |z|^2$. De plus, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.*

Supposons que P est un tel polynome (c'est à dire $|P(z)| = 1$ pour tout z avec $|z| = 1$). Notons que pour tout z tel que $|z| = 1$ on a que

$$|P(z)|^2 = P(z)\overline{P(z)} = P(z)\overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = 1$$

Exercice 2.
Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$ dont la dérivée est $\frac{1}{X}$.

Correction.
Soit F une telle fraction rationnelle dans $\mathbb{C}(X)$ représente par un quotient $\frac{A}{B}$ avec $B \neq 0$ (c'est à dire F est telle que sa dérivée est égal a $\frac{1}{X}$). Si F est constante alors sa dérivée est nulle est donc de dégrée $-\infty$. Ceci contredit le fait que $F' = \frac{1}{X}$ est de dégrée -1. Donc F ne peut pas être constante.
Supposons alors que F n'est pas constante et que A et B ont comme termes dominants aX^p et bX^q respectivement. S'il n'est pas nul, le polynôme $A'B$ est de dégrée $p-1+q$ et de coefficient dominant apb. De la même façon, si $AB' \neq 0$ alors son dégrée est égal à $p+q-1$ et le coefficient dominant est égal à aqb. Alors

$$\deg(A'B - AB') \leq p + q - 1$$

et le coefficient de x^{p+q-1} dans le polynôme $A'B-AB'$ est $(p-q)ab$. On a donc deux possibles situations:

i. Si $\deg(F) \neq 0$ alors $p \neq q$ et le polynôme $A'B - AB'$ est exactement de degré $p+q-1$. Donc

$$\deg(F') = \deg(A'B - AB') - \deg(B^2) = p + q - 1 - 2q = p - q - 1 = \deg(F) - 1$$

Cela implique alors que $-1 = \deg(F) - 1$ et alors $\deg(F) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $\deg(F) \neq 0$.

ii. Si $\deg(F) = 0$ alors $p = q$ et le polynôme $A'B - AB'$ est de degré strictement inférieur à $p+q-1$ et alors :

$$\deg(F') \leq p + q - 2 - 2q = \deg(F) - 2$$

Autrement dit

$$-1 \leq 0 - 2 = -2$$

ce qui est absurde!

On en déduit qu'il n'existe pas une telle fraction rationnelle.

Exercice 3.
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que si $\deg(F') < \deg F - 1$ alors $\deg F = 0$.

Correction.
Il suffit de répéter un argument similaire à celui du ii. dans l'exercice précédente (voir les trois premiers lignes du ii.).

Rappel 2. *Soit $u = u(x)$ fonction continue. Alors*

$$\int \frac{u'}{1+u^2} du = \arctan(u) + C.$$

Rappel 3. *Le théorème de décomposition en facteurs simples nous dit qu'on peut toujours trouver une décomposition en fractions simples soit sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (voir Théorèmes 8.28 et 8.25). On va résumer ici quelques cas des situations fréquents (sur $\mathbb{R}$): On considérera des fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$ où $\deg(P) < \deg(Q)$. Pour les cas dont le degré du numérateur P est plus grande ou égal au degré du denominateur Q il faudra d'abord faire une division euclidienne (pour trouver la partie entière E) :*

$$\frac{P}{Q} = \underbrace{E}_{\in \mathbb{K}[X]} + \underbrace{G}_{\in \mathbb{K}(X)}$$

ensuite on décompose G en fractions simples. Le tableau ci-dessous résume les cas des situations fréquents:

Table 1:

N	TYPE DE CAS (Dénominateur)	EXEMPLE	FORME DE LA FRACTION	FORME DE LA DECOMPOSITION EN FRACTIONS SIMPLES (où A, B et C sont des constantes inconnues)
1	Produit des facteurs linéaires distincts	$\frac{x}{(x+2)(x-3)}$	$\frac{P(X)}{(aX+b)(cX+d)}$	$\frac{A}{aX+b} + \frac{B}{cX+d}$
2	Produit des facteurs linéaires qui se répètent	$\frac{2x+3}{(x+4)^2}$	$\frac{P(X)}{(aX+b)^2}$	$\frac{A}{aX+b} + \frac{B}{(aX+b)^2}$
3	Produit des facteurs linéaires distincts et aussi facteurs qui se répètent	$\frac{4x^2-1}{(x-1)(2x+4)^2}$	$\frac{P(X)}{(aX+b)(cx+d)^2}$	$\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} + \frac{C}{(cX+d)^2}$
4	Produit des facteurs linéaires et quadratiques irréductibles distincts	$\frac{3x^2-7}{(x-2)(x+7)(x^2+x+1)(x^2+1)}$	$\frac{P(X)}{(aX+b)(X^2+cX+d)}$	$\frac{A}{aX+b} + \frac{BX+C}{X^2+cX+d}$
5	Produits des facteurs linéaires et quadratiques irréductibles avec des repetitions	$\frac{x^4-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}$	$\frac{P(X)}{(aX+b)^2(X^2+cX+d)^2}$	$\frac{A}{aX+b} + \frac{B}{(aX+b)^2} + \frac{CX+D}{X^2+cX+d} + \frac{EX+F}{(X^2+cX+d)^2}$

Exercice 4.
Trouver les coefficients réels a, b, c et d tels que

$$\frac{X^3+2X-5}{X-1} = aX^2 + bX + c + \frac{d}{X-1}$$

Correction.

On commence par la division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & & +2X & -5 & X-1 \\ \cline{5-5}
-X^3 & +X^2 & & & X^2+X+3 \\ \cline{1-2}
& X^2 & +2X & & \\
& -X^2 & +X & & \\ \cline{2-3}
& & 3X & -5 & \\
& & -3X & +3 & \\ \cline{3-4}
& & & -2 &
\end{array}$$

Alors $X^3+2X-5=(X-1)(X^2+X+3)-2$ ce qui nous donne

$$\frac{X^3+2X-5}{X-1}=X^2+X+3-\frac{2}{X-1}$$

Donc $a=1$, $b=1$, $c=3$ et $d=-2$.

Exercice 5.
Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$:

(1) $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$

(2) $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$

(3) $\frac{X^2+1}{X^4+1}$

Correction.

(1) Comme le degré du numérateur est supérieur au degré du denominateur on commence par une division euclidienne :

$$\begin{array}{rr|l}
X^5 & +X+1 & X^4-1 \\ \cline{3-3}
-X^5 & +X & X \\ \cline{1-2}
& 2X+1 &
\end{array}$$

Alors

$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1}=X+\frac{2X+1}{X^4-1}$$

On va alors trouver la décomposition en fractions simples de $\frac{2X+1}{X^4-1}$. Le denominateur X^4-1 se factorise sur $\mathbb{R}$ comme

$$X^4-1=(X^2-1)(X^2+1)=(X-1)(X+1)(X^2+1)$$

Le denominateur est alors un produit des facteurs linéaires distincts et un facteur quadratique irréductible. D'après les cas 1 et 4 du Table 1 on écris :

$$\frac{2X+1}{X^4-1}=\frac{2X+1}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}=\frac{A}{X-1}+\frac{B}{X+1}+\frac{CX+D}{X^2+1}$$

En multipliant par (X^4-1) on obtient :

$$2X+1=(X+1)(X^2+1)A+(X-1)(X^2+1)B+(X-1)(X+1)(CX+D)$$

Ensuite on peut développer e identifier les coefficients pour trouver un système des équations ou trouver des valeurs appropriées pour X, car cette équation est vérifie pour tout X. Par exemple, si $X=-1$ on obtient

$$-2+1=(-2)(2)B$$

et donc $B=\frac{1}{4}$. De même, si $X=1$ on obtient

$$3=(2)(2)A$$

et donc $A=\frac{3}{4}$. Si $X=i$ on trouve

$$2i+1=(i-1)(i+1)(Ci+D)$$

et si $X=-i$ on trouve

$$-2i+1=(-i-1)(-i+1)(-Ci+D)$$

En développant le deux cotés droits de ces équations on obtient

$$\begin{cases}2i+1=-2iC-2D\\ -2i+1=2iC-2D\end{cases}$$

On obtient alors $2C=-2$ et $-2D=1$ ce qui implique que $C=-1$ et $D=-\frac{1}{2}$. Enfin la décomposition en fractions simples sur $\mathbb{R}$ vient donné par :

$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1}=\frac{-2X-1}{2\,(X^2+1)}+X+\frac{3}{4(X-1)}+\frac{1}{4(X+1)}$$

Pour trouver la décomposition sur $\mathbb{C}$ on peut simplement travailler avec la fraction $\frac{-2x-1}{2(X^2+1)}$:

$$\frac{-2X-1}{2(X^2+1)}=\frac{-2X-1}{2(X-i)(X+i)}=\frac{A}{X-i}+\frac{B}{X+i}$$

Même méthode précédente nous amène à :

$$\frac{-2X-1}{2(X^2+1)}=\frac{-2i-1}{4i(i+X)}+\frac{1-2i}{4i(X-i)}$$

Enfin,

$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1}=X+\frac{3}{4(X-1)}-\frac{\frac{1}{2}-\frac{i}{4}}{X-i}-\frac{\frac{1}{2}+\frac{i}{4}}{X+i}+\frac{1}{4(X+1)}$$

(2) Sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}=\frac{7}{3\,(X^2+4)}-\frac{4}{3\,(X^2+1)}$$

Sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}=-\frac{2i}{3(X+i)}-\frac{7i}{12(X-2i)}+\frac{7i}{12(X+2i)}+\frac{2i}{3(X-i)}$$

(3) Sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{X^2+1}{X^4+1} = \frac{1}{2(x^2+\sqrt{2}x+1)} + \frac{1}{2(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

Sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{X^2+1}{X^4+1} = \frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)\sqrt[4]{-1}}{X+\sqrt[4]{-1}} - \frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\right)(-1)^{3/4}}{X-(-1)^{3/4}} + \frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\right)(-1)^{3/4}}{X+(-1)^{3/4}} - \frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)\sqrt[4]{-1}}{X-\sqrt[4]{-1}}$$

Où $(-1)^{3/4} = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

Exercice 6.

(1) Calculer les primitives des fonctions

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^2-2x+2} \in \mathbb{R}, \qquad x \in [2,3] \mapsto \frac{1}{x^2-5x+4} \in \mathbb{R}, \qquad x \in [\pi,17] \mapsto \frac{4x-1}{(x-1)(x^2+1)} \in \mathbb{R},$$
$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^4+1} \in \mathbb{R}$$

(2) Calculer les intégrales

$$\int_0^2 \frac{x^4}{x^2+4}dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^4+x^2-6}dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)-5\sin(x)+6}dx$$

Correction.

- On note que le polynôme x^2-2x+2 est irréductible sur $\mathbb{R}$, donc on peut simplement compléter le carré (on additionne et soustrait $(b/2)^2 = 1$):

$$x^2-2x+2 = x^2-2x+1-1+2 = (x-1)^2+1$$

On pose $u = x-1$ et donc $u' = 1$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1}dx &= \int \frac{u'}{u^2+1}du \\ &= \arctan(u)+C \\ &= \arctan(x-1)+C\end{aligned}$$

- On commence par factoriser le dénominateur (si possible)

$$x^2-5x+4 = (x-4)(x-1)$$

On cherche alors décomposer la fonction $\frac{1}{x^2-5x+4}$ en fractions simples :

$$\frac{1}{x^2-5x+4} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-1}$$

On obtient

$$\begin{aligned}1 &= A(x-1) + B(x-4)\\ 1 &= x(A+B) - A - 4B\end{aligned}$$

Par identification on obtient un système des équations :

$$\begin{cases}A + B = 0\\ A - 4B = 1\end{cases}$$

D'où $A = \frac{1}{3}$ et $B = \frac{-1}{3}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 - 5x + 4}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-4}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\\ &= \frac{1}{3}\ln|x+4| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + C.\end{aligned}$$

- $$\int \frac{4x-1}{(x-3)(x^2+1)}dx = \frac{1}{6}\left(8x^3 + 33x^2 + 222x + 660\log(x-3) - 1179\right)$$

- $$\int \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{-\log\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right) + \log\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right) - 2\tan^{-1}\left(1 - \sqrt{2}x\right) + 2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x + 1\right)}{4\sqrt{2}}$$

  Ici log dénote logarithme naturel ln et $\tan^{-1}() = \arctan()$.

- La décomposition en fractions simples donne :

  $$\frac{x^4}{x^2+4} = x^2 + \frac{16}{x^2+4} - 4$$

  La primitive est égal à :

  $$\int \frac{x^4}{x^2+4}dx = \frac{x^3}{3} - 4x + 8\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

  De plus,

  $$\int_0^2 \frac{x^4}{x^2+4}dx = 2\pi - \frac{16}{3}$$

- On note d'abord que

  $$\frac{1}{x^4+x^2-6} = \frac{1}{10\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}\right)} - \frac{1}{10\sqrt{2}\left(x+\sqrt{2}\right)} - \frac{1}{5(x^2+3)}$$

  Donc

  $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4+x^2-6}dx = -\frac{\pi}{15\sqrt{3}} + \frac{\log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{5\sqrt{2}} - \frac{\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{5\sqrt{2}}$$

  La primitive est égal à :

  $$\int \frac{1}{x^4+x^2-6}dx = \frac{1}{60}\left(3\sqrt{2}\left(\log\left(\sqrt{2} - x\right) - \log\left(x + \sqrt{2}\right)\right) - 4\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

- On peut commencer par utiliser le Théorème de changement de variable et après la décomposition en fractions simples: On pose $u = \sin(x)$. Alors $du = \cos(x)dx$ et alors :

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) - 5\sin(x) + 6} dx = \int \frac{du}{u^2 - 5u + 6}$$

De cette manière on peut travailler avec une nouvelle intégral sur la variable u. Les limites d'intégration correspond alors à $u(0) = 0$ et $u(\pi/2) = 1$. Donc :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) - 5\sin(x) + 6} dx = \int_0^1 \frac{du}{u^2 - 5u + 6}$$

Or,

$$\frac{1}{u^2 - 5u + 6} = \frac{1}{u-3} - \frac{1}{u-2}$$

et alors,

$$\int \frac{1}{u^2 - 5u + 6} du = \log|u-3| + \log|u-2|$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) - 5\sin(x) + 6} dx = \int_0^1 \frac{du}{u^2 - 5u + 6} &= (\log|1-3| - \log|1-2|) - (\log|0-3| - \log|0-2|) \\ &= \log(4) - \log(3) \\ &= \log\left(\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

Exercice 7.

(1) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$.

(2) En déduire que $\frac{22}{7} > \pi$.

Correction.

(1) On peut commencer par utiliser le théorème du binôme et développer le numérateur :

$$x^4(1-x)^4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4$$

Ensuite on peut faire la division euclidienne :

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^8 & -4x^7 & +6x^6 & -4x^5 & +x^4 & & & x^2+1 \\
\cline{8-8}
-x^8 & & -x^6 & & & & & x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4 \\
\cline{1-3}
 & -4x^7 & +5x^6 & -4x^5 & & & & \\
 & 4x^7 & & +4x^5 & & & & \\
\cline{2-4}
 & & 5x^6 & & +x^4 & & & \\
 & & -5x^6 & & -5x^4 & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & -4x^4 & & & \\
 & & & & 4x^4 & +4x^2 & & \\
\cline{5-6}
 & & & & & 4x^2 & & \\
 & & & & & -4x^2 & -4 & \\
\cline{6-7}
 & & & & & & -4 &
\end{array}
$$

Alors

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}$$

Or $\displaystyle\int \frac{4}{1+x^2} = 4\tan^{-1}(x)$. Alors

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx &= \left[\frac{x^7}{7} - \frac{2x^6}{3} + x^5 - \frac{4x^3}{3} + 4x - 4\tan^{-1}(x)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{7} - \frac{4}{6} + \frac{5}{5} - \frac{4}{3} + \frac{4}{1} - 4\tan^{-1}(1) \\
&= \frac{22}{7} - \pi
\end{aligned}
$$

(2) Comme il s'agit d'un intégral d'une fonction strictement positive sur $[0,1]$, son intégral sur $[0,1]$ doit être strictement positive. Alors $\frac{22}{7} - \pi > 0$.