Arithmétique des polynômes

Feuille 1

Exercice 1. Dans $\mathbb{C}[X]$, considérons les polynômes $A = X^3 + iX + i$ et $B = X^2 + X + i$ et les trois polynômes

$$\begin{cases} P = 2A - XB \\ Q = (X+i)A + (X-i)B \\ R = (X - 2i + 1)A - (X^2 - 2iX + 2i)B \end{cases}$$

Calculer P, Q, R et préciser leurs degrés.

Exercice 2. Soient $A = (X+1)^3$ et $B = (1-X)^3$.

1. Que valent les degrés de A et B ?
2. Sans calcul, que peut-on dire de $\deg(A+B)$ et de $\deg(A-B)$?
3. Calculer $A+B$ et $A-B$ et leurs degrés.

Exercice 3. Considérons les polynômes $A = \overline{2}X^3 - \overline{3}X + \overline{5}$ et $B = \overline{3}X^4 - \overline{3}X^2 + \overline{2}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Calculer $A+B$ et AB et préciser leurs termes dominants. Que peut-on remarquer ? Expliquer.

Exercice 4.
1. Calculer le produit $(1+X)(1+X^2)(1+X^4)$.
2. Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n}(1 + X^{2^k}) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{2^{n+1}-1}.$$

Exercice 5. Vérifier que $(X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1) = X^5 + X + 1$; en déduire des factorisations de $X^5 + X - 1$ et de 100 009.

Exercice 6. Pour $A = X^3 - 2X + 1$, $P = X + 1$ et $Q = X^2$, calculer $A(P)$, $P(A)$, $A(Q)$, $Q(A)$.

Exercice 7. Soient $P_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $P_n = (1 + nX)P_{n-1}$.

1. Calculer P_1, P_2 et P_3.
2. Quel est le coefficient dominant de P_n ?
3. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(0)$.

Exercice 8. Faire la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{C}[X]$:

A	B
8	3
$2X^4-3X^3+4X^2-5X+6$	X^2-3X+1
X^3-3X^2-X-1	$3X^2-2X+1$
X^3-X^2-X	$X-1+2i$

Exercice 9. (*) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P \circ P - X$ est divisible par $P - X$.

Solution : Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme. On commence par considérer le polynôme $P \circ P - P$:

$$\begin{aligned} P \circ P - P &= \sum_{k=0}^{n} a_k P^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (P^k - X^k) = \sum_{k=1}^{n} a_k (P^k - X^k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k (P-X) \sum_{i=0}^{k-1} P^i X^i = (P-X) \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} P^i X^i \end{aligned}$$

On en déduit que $P - X$ divise $P \circ P - P$ et aussi $P \circ P - X = P \circ P - P + (P - X)$.

Exercice 10. Quels sont les polynômes de degré 4 congrus à X modulo X^2+1 ?

Exercice 11. Trouver les réels a et b pour que $X^2 - 2X + 1$ divise $X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2$.

Exercice 12. Les restes des divisions euclidiennes d'un polynôme A par $X - 1$ et $X - 2$ sont respectivement 4 et 5. Quel est le reste de la division euclidienne de A par $(X - 1)(X - 2)$?

Exercice 13. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ divisibles par leur dérivé P' pour

1. (*) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et en déduire le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
2. (**) pour $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ quelconque grâce au développement de Taylor.

Solution : Dans tous les cas, les polynômes constants sont des solutions évidentes ; on va donc supposer le degré de P strictement positif.
1) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (ou n'importe quel corps algébriquement clos) alors on peut décomposer P de la façon suivante :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $m_i, n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Son dérivé s'écrit donc

$$P' = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{m_i - 1} Q$$

où $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(\alpha_i) \neq 0$ pour tout i.
Comme P' divise P alors Q divise $\prod (X - \alpha_i)$ mais comme $Q(\alpha_i) \neq 0$ pour tout i alors Q est constant (non nul). De plus, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \deg(P) = \deg(P') + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{n} m_i - 1 = 1 + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) - n$$

c'est-à-dire $n = 1$.
On en déduit que $P = \lambda (X - \alpha)^m$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et P' divise P alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$P = \frac{1}{\deg(P)} (X - a) P'$$

Comme $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, on peut appliquer le résultat sur $\mathbb{C}$ pour montrer que

$$P = \lambda(X-a)^n$$

où $\lambda, a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

2) On a, à nouveau,

$$P = \frac{1}{\deg(P)}(X-a)P'$$

avec $a \in \mathbb{K}$.
On va écrire le développement de Taylor de P en a :

$$P = \sum \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

On a donc

$$P' = \sum \frac{P^{(k)}(a)}{k!}k(X-a)^{k-1}$$

En utilisant ces trois égalités, on obtient :

$$\sum \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \frac{1}{\deg(P)}(X-a)\sum \frac{P^{(k)}(a)}{k!}k(X-a)^{k-1} = \frac{1}{\deg(P)}\sum \frac{P^{(k)}(a)}{k!}k(X-a)^k$$

On en déduit (par unicité des coefficients du développement de Taylor) que pour tout k,

$$P^{(k)}(a)\left(1 - \frac{k}{\deg(P)}\right) = 0$$

On en déduit que, pour tout $k \neq \deg(P)$,

$$P^{(k)}(a) = 0$$

et donc $P = cste(X-a)^{\deg(P)}$.

Exercice 14. Déterminer les racines complexes du polynôme $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et en déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 15. Déterminer a et b dans $\mathbb{C}$ de manière que les racines de $P = X^4 - 26X^3 + 231X^2 + aX + b$ soient en progression arithmétique.

Exercice 16. Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients réels possédant n racines réelles distinctes.

1. Montrer que P' possède exactement $n-1$ racines réelles distinctes. (Utiliser le théorème de Rolle.)
2. (*) En déduire que toutes les racines (complexes) de $P^2 + 1$ sont simples.

Solution : Soit a une racine de P^2+1. Comme $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $a \notin \mathbb{R}$ (puisque $P(a) = \pm i$). Le nombre complexe a est une racine double de P^2+1 si, et seulement si, $(P^2+1)'(a) = P(a)P'(a) = 0$. Puisque $P(a) \neq 0$, c'est équivalent à $P'(a) = 0$. Cette égalité n'arrive jamais puisque P' n'a pas de racine non-réelle.

Exercice 17. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le reste de la division euclidienne de $F_a = (X\sin(a) + \cos(a))^n$ puis $G_a = (X\cos(a) + \sin(a))^n$ par X^2+1.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $A_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$.

Exercice 19. Soit p un nombre premier. Considérons le polynôme $P = X^p$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Quelle est la multiplicité de la racine 0 de P ? Calculer les dérivés de P. Que peut-on remarquer ?

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 21. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$ et considérons le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que P_n n'a pas de racine multiple (regarder $P_n - P_n'$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout n, P_{2n} n'a pas de racine réelle et P_{2n+1} a une unique racine réelle.

Solution : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
P_n - P_n' &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k-1)!} X^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} X^k = \frac{X^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Si $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $P_n(x)$ et $P_n'(x)$ peuvent être simultanément nul que pour $x = 0$. Comme $P_n(0) = 1$ alors aucune racine de P_n n'est double.

2) Montrons par récurrence que pour tout n pair, P_n n'a pas de racine réelle et pour tout n impair, P_n a une unique racine réelle α_n tel que

- $P_n(x) < 0$ si $x < \alpha_n$
- $P_n(x) > 0$ si $x > \alpha_n$

Initialisation : $P_0 = 1$ n'a pas de racine (réelle) et $P_1 = 1 + X$ a une unique racine (réelle) -1 et $P_1(x) < 0$ si $x < -1$ et $P_1(x) > 0$ si $x > -1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n.

Si $n+1$ est impair alors n est pair. On en déduit que $P_n = P_{n+1}'$ ne s'annule jamais et comme $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = +\infty$ alors $P_n(x)$ est strictement positif pour tout x. On en déduit donc que $x \mapsto P_{n+1}(x)$ est strictement croissante et est continue. Comme $\lim_{n\to-\infty} P_{n+1}(x) = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} P_{n+1}(x) = +\infty$ alors, par le TVI, P_{n+1} a une unique racine α_n et $P_{n+1}(x) < 0$ si $x < \alpha_n$ et $P_{n+1}(x) > 0$ si $x > \alpha_n$.

Si $n+1$ est pair alors n est impair. Comme P_n a une unique racine α et $P_n(x) < 0$ si $x < \alpha_n$ et $P_n(x) > 0$ si $x > \alpha_n$ alors $x \mapsto P_{n+1}(x)$ est strictement décroissante sur $]-infty, \alpha_n]$ et est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$. On en déduit donc que

$$\forall x, P_{n+1}(x) > \inf_{x\in\mathbb{R}} P_{n+1}(x) = P_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^{n+1}}{(n+1)!} > 0$$