L1 MPC-MI-DL ; L2 PPPE
2023-2024

Arithmétique des polynômes

Feuille 3

Exercice 1.

1. (*) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) \in \mathbb{R}$;
2. (*) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $P(z) \in \mathbb{R}$;
3. (**) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $P(z) \in \mathbb{Q}$;
   On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
4. (**) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $z \in \mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $P(z) \in \mathbb{S}^1$.
   On considérera le polynôme réciproque de P : si P est le polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ (avec $a_n \neq 0$) alors son polynôme réciproque est $\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} X^i = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 2. Trouver les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ (si elles existent) telles que

1. $F^2 = X^3$;
2. $F^3 = 1$;
3. $(X-1)F^3 = \frac{X^3}{X^2-2X+1}$.

Exercice 3. (*) Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$ dont la dérivée est $\frac{1}{X}$.

Exercice 4. (*) Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que si $\deg(F') < \deg(F) - 1$ alors $\deg(F) = 0$.

Exercice 5. Trouver les coefficients réels a, b, c et d tels que

$$\frac{X^3 + 2X - 5}{X - 1} = aX^2 + bX + c + \frac{d}{X-1}.$$

Exercice 6. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$:

1. $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1}$
2. $\dfrac{X^2 - 3}{(X^2+1)(X^2+4)}$
3. $\dfrac{X^2 + 1}{X^4 + 1}$

Exercice 7. 1. Calculer les primitives des fonctions

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \in \mathbb{R}, \quad x \in [2,3] \mapsto \frac{1}{x^2 - 5x + 4} \in \mathbb{R}, \quad x \in [\pi, 17] \mapsto \frac{4x - 1}{(x-3)(x^2+1)} \in \mathbb{R},$$

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^4 + 1} \in \mathbb{R}.$$

2. Calculer les intégrales $\int_0^2 \frac{x^4}{x^2+4}\mathrm{d}x$, $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2-6}$ et $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)\mathrm{d}x}{\sin^2(x)-5\sin(x)+6}$.

Exercice 8. 1. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. En déduire que $\frac{22}{7} > \pi$.

Exercice 9. (**) Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Gauß-Lucas : les racines du dérivé d'un polynôme complexe non-constant P sont dans l'enveloppe convexe des zéros de P i.e. si $z_1, \dots, z_n$ sont les racines de P, les racines de P' sont dans l'ensemble

$$\mathrm{Conv}(z_1, \dots, z_n) \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

1. Montrer que ce théorème est vrai si $\deg(P) = 2$.
2. Soit $\mathcal{L} : \mathbb{C}[X] \setminus \{0\} \to \mathbb{C}(X)$ l'application associant à un polynôme P sa « dérivée logarithmique » $\frac{P'}{P}$. Montrer que, pour toute paire de polynômes (P, Q),

$$\mathcal{L}(PQ) = \mathcal{L}(P) + \mathcal{L}(Q).$$

3. En déduire la décomposition en éléments simples de $\mathcal{L}(P)$ pour un polynôme complexe non-constant $P = \lambda \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{n_i}$ (on pourra commencer avec le cas $n = 1$).
4. Soit z une racine de P' qui n'annule pas P. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{|z - a_i|^2} \right) z = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{|z - a_i|^2} a_i$$

5. Conclure.