Université d'Angers
U.F.R. SCIENCES

2023-2024
SANTIAGO TORO

L1 LICENCE DE MATHÉMATIQUES
FONDEMENTS D'ANALYSE
Notes et exercices P3-P4

Contents

1 Étude locale de fonctions

1.1 Règle de l'Hospital

1.2 Equivalence des fonctions

1.3 Fonction négligeable

Proposition 1.1 (Quelques propriétés de la notation "petite o")**.** *Au voisinage de zéro on a que:*

(1.1.1) $x = \underset{x\to 0}{o}(1)$*;* $\quad x^2 = o\left(x^1\right)$*;* $\quad x^3 = o\left(x^2\right)$*;* $\cdots$ *etc.*

(1.1.2) *Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $p \leq q$. Alors*

$$\mathrm{o}\left(x^p\right) + \mathrm{o}\left(x^q\right) = \mathrm{o}\left(x^p\right)$$
$$\mathrm{o}\left(x^p\right) - \mathrm{o}\left(x^q\right) = \mathrm{o}\left(x^p\right)$$
$$\frac{\mathrm{o}\left(x^q\right)}{x^p} = \mathrm{o}\left(x^{q-p}\right)$$

(1.1.3) *Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Alors*

$$x^p \cdot \mathrm{o}\left(x^q\right) = \mathrm{o}\left(x^{p+q}\right)$$

On a aussi que

$$\mathrm{o}\left(x^p\right) \cdot \mathrm{o}\left(x^q\right) = \mathrm{o}\left(x^{p+q}\right)$$

Par contre, il faut noter que

$$\mathrm{o}\left(x^p\right) \cdot \mathrm{o}\left(x^p\right) = \mathrm{o}\left(x^p\right)$$

Démonstration. Toutes ces affirmations sont un exercice facile à réaliser à l'aide de la définition. Il est recommandé de faire les preuves pour mieux comprendre la définition ! □

2 Développements limités

2.1 Définition et exemples basiques

Définition 2.1. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité d'ordre n* en a, noté $\mathrm{DL}_n(a)$, s'il existent $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots \alpha_n(x-a)^n}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{\underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)}_{\text{Reste}}$$

On remarque que si f admet un $\mathrm{DL}_a(n)$ alors $\alpha_0 = f(a)$.

2.2. La fonction $\frac{1}{1+x}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 1$ et n un entier positif. Rappelons la formule de la somme géométrique:

$$1 + x +^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x +^2 + x^3 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Cependant, le dernier terme est négligeable devant x^n, c'est à dire, il est un $\mathrm{o}\left(x^n\right)$ car

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \cdot \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\substack{\to 0 \\ x\to 0}}.$$

Alors,

(2.3) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

La Proposition 2.21, qu'on verra plus tard, implique que on peut replacer x par $-x$ ou par $\pm x^2$ (car $-x$ et $\pm x^2$ tendent vers 0 lorsque x tend vers 0). Dans ce cas on obtient trois $\mathrm{DL}_0(n)$ utiles de la forme:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \tag{2.6}$$

Théorème 2.7. *Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul, I un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n-fois dérivable sur I. Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par la développement de Taylor-Young :*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)$$

2.8. La fonction $(1+x)^d$. Soit d un entier positif. La formule du binôme de Newton permet d'ecrire

$$(a+b)^d = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} a^k b^{d-k}$$

où $\binom{d}{k} = \frac{d!}{k!(d-k)!} = \frac{d(d-1)\cdots(d-(k-1))}{k!}$. Avec $a = x$ et $b = 1$ on obtient

$$(1+x)^d = 1 + dx + \frac{d(d-1)}{2}x^2 + \frac{d(d-1)(d-2)}{2\cdot 3}x^3 + \cdots + dx^{d-1} + x^d.$$

Cette formule n'est plus valable si l'exposant d n'est pas un entier positif. En revanche, les développement limité permettent de trouver une généralisation partielle au cas où $d \in \mathbb{R}$. Désormais on va supposer que $d \in \mathbb{R}$.
On pose

$$\binom{d}{k} := \frac{d(d-1)(d-2)\cdots(d-(k-1))}{k!}.$$

Rappelons que la dérivée de $f(x) = (1+x)^d$ vient donné par $d(1+x)^{d-1}$. En itérant on obtient que la k-iéme dérivée de f est:

$$f^{(k)}(x) = d(d-1)(d-2)\cdots(d-(k-1))(1+x)^{d-k}.$$

Alors pour tout entier $k \geq 0$:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{d}{k}$$

Le Theorem 2.7 de Taylor-Young nous donne alors un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $(1+x)^d$:

$$(1+x)^d = 1 + dx + \frac{d(d-1)}{2}x^2 + \frac{d(d-1)(d-2)}{2\cdot 3}x^3 + \cdots + \binom{d}{n}x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

Différents développements limites peuvent être obtenus à partir de cette formule. Nous recommandons au lecteur d'étudier les exemples lorsque $d = 1/2$ ou $d = -1/2$ et de vérifier les développements limites suivants :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right) \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right) \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^4}{8} + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \tag{2.11}$$

Exemple 2.12. Le Theorem 2.7 peut être utilisé pour calculer les développements limites suivants. Les détails sont laissés comme exercice au lecteur.

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \tag{2.13}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \tag{2.14}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right) \tag{2.15}$$

Proposition 2.16 (Applications des DL I)**.** *Soient f et g des fonctions définies sur un intervalle voisinage de a. Alors f est équivalente à g en a si et seulement si $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$.*

Démonstration. Supposons $f \underset{x\to a}{\sim} g$. Alors par définition il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} f(x) = g(x)\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 1 \end{cases}$$

Définissons $\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\delta = \varepsilon - 1$. Alors

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) = g(x)(\delta(x) + 1) = g(x) + g(x)\delta(x)$$

En plus, $\lim\limits_{x\to a} \delta(x) = 1 - 1 = 0$. D'où

$$f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x)).$$

Réciproquement, si $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ alors il existe $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

Définissons $\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\delta = 1 + \varepsilon$. Alors $f = g \cdot \delta$ où $\lim\limits_{x\to a} \delta(x) = 1$. Alors $f \underset{x\to a}{\sim} g$. $\square$

La proposition précédente nous dit alors que, sous la hypothèse d'existence de DL, pour calculer un équivalente simple d'une fonction f, il suffit donc d'en calculer un DL : le premier terme (non nul!) avant le "o" fournit l'equivalent cherché.

Proposition 2.17.

(2.17.1) *Une fonction f admet un* $\mathrm{DL}_0(a)$ *si et seulement si f est continue en a.*

(2.17.2) *Une fonction f admet un* $\mathrm{DL}_1(a)$ *si et seulement si f est dérivable en a. Dans ce cas*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^1\right)$$

Démonstration. Exercice! □

2.2 Opérations sur les développement limités en un point

De nombreux développements limites peuvent être calculés à partir de développements limites connus en utilisant différentes opérations. Dans cette section, nous étudierons ces opérations et examinerons différents types d'exemples.

2.2.1 Additions et multiplications par scalaires

Proposition 2.18. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonctions. si f et g admettent des* $\mathrm{DL}_n(0)$ *des parties regulieres respectives P et Q:*

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + \mathrm{o}(x^n) \\ g(x) &= Q(x) + \mathrm{o}(x^n) \end{aligned}$$

où $\deg(P), \deg(Q) \leq n$. *Alors la fonction $\lambda f + g$ admet un* $\mathrm{DL}_n(0)$ *de partie reguliere $\lambda P + Q$:*

$$\lambda f(x) + g(x) = \lambda P(x) + Q(x) + \mathrm{o}(x^n).$$

Exemple 2.19. Au voisinage de 0 on a que le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Par la Proposition 2.18 on a que le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $2\sin(x) + \cos(x)$ est:

$$\begin{aligned} 2\sin(x) + \cos(x) &= 2\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)\right) + 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right) \\ &= 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

2.2.2 Products and Compositions

Proposition 2.20. *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f et g admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q,*

$$f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n), \quad \deg(P) \leq n$$
$$g(x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n), \quad \deg(Q) \leq n$$

Alors le produit fg admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant PQ au degré n.

Proposition 2.21. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions où I, J sont des intervalles voisinages de 0. On suppose que:*

(2.21.1) *$f(0) = 0$ et f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme $f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ de partie régulière $P(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k$, $\deg(P(x)) \leq n$;*

(2.21.2) *g admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme $g(y) = Q(y) + \underset{y\to 0}{\mathrm{o}}(y^n)$ de partie régulière $Q(y) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k y^k$, $\deg(Q(x)) \leq n$*

Alors $g \circ f$ est bien définie au voisinage de 0 et admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant le polynôme $Q \circ P$ au degré n:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "z=g(f(x))"'] & y = f(x) \arrow[r, "g"] & z = g(y) \end{tikzcd}$$

Exemple 2.22. On souhaite déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \cos(\sin(x))$:

$$\begin{aligned}\cos(\sin(x)) &= \cos\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right)^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right)^3\right)\end{aligned}$$

On obtient
$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Exercice 2.23 (TD 6.4 - 6.8, 6.10)**.**

(2.23.1) Donner le $\mathrm{DL}_0(3)$ de $f(x) = \mathrm{e}^x \cos(x)$. En déduire un équivalent simple en 0 de $g(x) = \mathrm{e}^x \cos(x) - 1 - x$. On commence par calculer le $\mathrm{DL}_0(3)$ de la fonction exponentiel e^x à l'aide du Theorem 2.7 (Taylor-Young). Notons que:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Alors par la Proposition 2.20 on obtient

$$\begin{aligned}
e^x \cos(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right)\right) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) \\
&= 1 + x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

En plus on peut alors écrire:

$$e^x - 1 - x = -\frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$$

On a vu dans la Proposition 2.16 que cette derniere équation équivaut à dire

$$e^x - 1 - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3!}$$

Dans la feuille de TD, on trouve différents types d'exercices dans lesquels on utilise les opérations de produit et de composition. Vous trouverez ici les réponses à une sélection d'exercices. Les calculs sont laissés comme exercice (certains on été travaillé en cours!).

(2.23.2) Donner le $DL_0(3)$ de $f(x) = \sqrt{2+x}$.

$$\sqrt{2+x} = \sqrt{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{x^2}{16\sqrt{2}} + \frac{x^3}{64\sqrt{2}} + o\left(x^3\right)$$

(2.23.3) Donner le $DL_0(3)$ de $f(x) = \frac{1}{2+x}$.

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)$$

(2.23.4) Donner le $DL_0(3)$ de $f(x) = \ln(1+x+x^2)$.

$$\ln(1+x+x^2) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

(2.23.5) Donner le $DL_0(3)$ de $f(x) = e^{\cos(x)}$. En déduire un équivalent simple en 0 de $g(x) = e^{\cos(x)} - e$.

$$e^{\cos(x)} = e - \frac{ex^2}{2} + o\left(x^4\right)$$

L'équivalente simple en 0 de $g(x)$ est alors $-\frac{ex^2}{2}$.

(2.23.6) Donner le $DL_0(5)$ de $f(x) = \frac{x^5 \sin(x)}{\ln(1+x)}$.

$$\frac{x^5 \sin(x)}{\ln(1+x)} = x^5 + o\left(x^5\right)$$

(2.23.7) Donner le $\mathrm{DL}_0\,(3)$ de $f(x) = \sin(1+x)$.

$$\sin(1+x) = \sin(1) + x\cos(1) - \frac{1}{2}\sin(1)x^2 - \frac{1}{2}\cos(1)x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

Remarque 2.24. La proposition précédente est utile pour calculer le développement limité d'un quotient. En effet, soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et $0 \in I$ tel que $f(0) \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} &= \left(\frac{1}{f(0)}\right)\left(\frac{1}{1 + \frac{f(x)-f(0)}{f(0)}}\right)\\ &= \frac{1}{f(0)}g(\widehat{f}(x))\end{aligned}$$

où $g(x) = \frac{1}{1+x}$ et $\widehat{f}(x) = \frac{f(x)-f(0)}{f(0)}$. On va étudier un exemple pour illustrer cette situation.

Exemple 2.25. Calculons le $\mathrm{DL}_5\,(0)$ de la fonction $\frac{1}{\cos(x)}$. Soit $f(x) = \cos(x)$. On veut alors calculer le $\mathrm{DL}_5\,(0)$ de la fonction $\frac{1}{f(x)}$. Comme $f(0) = \cos(0) = 1 \neq 0$, la Remark 2.24 implique qu'on peut écrire:

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{f(x)} = \left(\frac{1}{f(0)}\right)\left(\frac{1}{1 + \frac{f(x)-f(0)}{f(0)}}\right) = \frac{1}{1 + \underbrace{(\cos(x) - 1)}_{y}}$$

Par (2.4) on sait que:

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 + \mathrm{o}\left(y^4\right)$$

Alors

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 - (\cos(x) - 1) + (\cos(x) - 1)^2 - (\cos(x) - 1)^3 + (\cos(x) - 1)^4 + \mathrm{o}\left((\cos(x) - 1)^4\right)$$

Par contre le $\mathrm{DL}_5\,(0)$ de la fonction $\cos(x) - 1$ correspond à (voir (2.14)):

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

En remplaçant $\cos(x) - 1$ par cette dernière développement limité on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x) - 1} = 1 &- \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^2 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^3\\ &+ \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^4 + \mathrm{o}\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^4\right)\end{aligned}$$

En simplifiant on trouve

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

Dans certains cas, la Remark 2.24 ne peut pas être utilisée directement, comme nous le verrons dans l'Example 2.30 :

2.2.3 Quotients

On a vu qu'une façon de calculer développements limites des quotients consiste à utiliser la Proposition 2.21 en conjonction avec la Remark 2.24. Désormais, on va étudier une autre façon d'en faire en utilisant la division suivant les puissances croissantes.

Proposition 2.26. *Si f et g avec $g(0) \neq 0$ ont des* $\mathrm{DL}_n\,(0)$ *de la forme*

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + \mathrm{o}\,(n^x) \\ g(x) &= \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n + \mathrm{o}\,(n^x) \end{aligned}$$

alors la fonction f/g a aussi un $\mathrm{DL}_n\,(0)$ *dont la partie régulière est le quotient dans la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de la partie régulière $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ du* $\mathrm{DL}_n\,(0)$ *de f par la partie régulière $\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n$ du* $\mathrm{DL}_n\,(0)$ *de g.*

Exemple 2.27. On va calculer le $\mathrm{DL}_2\,(0)$ de la fonction $f(x) = \frac{\ln(1+\tan(x))}{1-\cos(x)}$. Le numérateur $\ln(1+\tan(x))$ est équivalent à x au voisinage de 0, tandis que le dénominateur $1 \cos(x)$ est équivalent à $\frac{x^2}{2}$ au voisinage de 0. Le développement limite a lordre 2 de f doit être de la forme:

$$\frac{2}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$

Il contient 4 termes. On va donc déterminer les développements limites a l'ordre 4 du numérateur, et du dénominateur de la fonction f. On commence par remarquer que

$$\begin{aligned} \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\,(x^4)} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\,(x^4)\right)}\right) \end{aligned}$$

À ce stade, on pourrait utiliser le développement limité de $\frac{1}{1-y}$ vu dans 2.2 où $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$ et ensuite le produit des développements limites. Cependant, on va utiliser la division suivant les puissances croissantes.

$$\begin{array}{c|l} x - \frac{x^3}{6} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{2-2} -\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}\right) & x + \frac{x^3}{3} \\ \cline{1-1} \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{24} & \\ -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{72}\right) & \\ \cline{1-1} 0 + \cdots & \end{array}$$

Alors, $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$. Pour calculer le $\mathrm{DL}_4\,(0)$ de $\ln(1+\tan(x))$ à l'ordre 4, on va remplacer par $y = x + \frac{x^3}{3}$ dans le $\mathrm{DL}_4\,(0)$ de $\ln(1+y)$ (noter c'est possible car $y(0) = 0$). Le $\mathrm{DL}_4\,(0)$ de $\ln(1+y)$ et les puissances successives de y, tronquées au degré 4 sont

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

$$y = x + \frac{x^3}{3}, \qquad y^2 = x^2, + \frac{2}{3}x^4, \qquad y^3 = x^3, \qquad y^4 = x^4$$

D'où le développement limité du numérateur de f vient donné par

$$\begin{aligned}\ln(1+\tan(x)) &= \left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{2}{3}x^4\right) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right).\end{aligned}$$

Le développement limité du numérateur de f s'obtient à partir de celui de $\cos(x)$:

$$1 - \cos(x) = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$

On en déduit que

$$f(x) = \frac{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} - \frac{7x^3}{12} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)}{\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^3)\right)} = \frac{2}{x} \cdot \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} - \frac{7x^3}{12} + \mathrm{o}\left(x^3\right)}{1 - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^3)}$$

On peut encore effectuer la division selon les puissances croissantes de $1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} - \frac{7x^3}{12}$ par $1 - \frac{x^2}{12}$ à l'ordre 3 ou bien, calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^3)}$$

en remplaçant dans le développement limité de $\frac{1}{1-u}$ avec $u = \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$. En utilisant cette dernière technique on obtient:

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

D'après la règle du produit des développements limités il en résulte que

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2}{x} \cdot \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} - \frac{7x^3}{12} + \mathrm{o}\left(x^3\right)}{1 - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^3)} \\ &= \frac{2}{x} \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} - \frac{7x^3}{12} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= \frac{2}{x} \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{5x^3}{8} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= \frac{2}{x} - 1 + \frac{3x}{2} - \frac{5x^2}{4} + \mathrm{o}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

2.2.4 Primitive et dérivation

Théorème 2.28 (Primitivation des DL). *Soit I un intervalle voisinage de 0 et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière P, alors tout primitive F de f sur I admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de la forme:*

$$F(x) = F(0) + \int_0^x P(t)dt + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$$

Exemple 2.29. Soit $F(x) = \ln(1-x)$. Notons que $F(x)$ est la primitive de la fonction $\frac{-1}{1-x}$. Cette dernière admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme (voir (2.3)):

$$\frac{-1}{1-x} = -(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) + \mathrm{o}(x^n)$$

La fonction $F(x)$ étant une primitive de $\frac{-1}{1-x}$ admet alors un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$, par le Theorem 2.28, de la forme

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &= \ln(1) - \int_0^x (1 + t + t^2 + \cdots + t^n)dt + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Cette même stratégie permet de retrouver :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$$

Exemple 2.30 (TD 6.9). Calculons le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction $f(x) = \frac{x^5 \sin(x)}{\ln(1+x)}$. On commence par calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x^5 \sin(x)$. Rappelons que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Alors

$$x^5 \sin(x) = x^5 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)$$

Notons que dans l'égalité ci-dessus on a utilisé (1.1.3). Désormais, on va se concentrer sur le calcul du $\mathrm{DL}_5(0)$ pour la fonction $\frac{1}{\ln(1+x)}$. Il faut d'abord noter que la Remark 2.24 peut pas être utilisé directement car lorsque qu'on évalue le dénominateur en zéro on trouve $\ln(1+0) = 0$. En revanche on peut remplacer $\ln(1+x)$ par son développement limité et faire de même pour $\sin(x)$:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Donc,

$$f(x) = \frac{x^5\left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)}$$

En prenant x en facteur sur le dénominateur on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^5\left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)}{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)} \\ &= \frac{x^4\left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)} \end{aligned}$$

Autrement dit, f s'écrit comme :

$$f(x) = \left(x^5 - \frac{x^7}{3!} + \mathrm{o}\left(x^7\right)\right) \cdot \left[\frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)}_{y}}\right]$$

Or,

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \mathrm{o}\left(y^2\right)$$

Alors (noter que $y(0) = 0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^5 - \frac{x^7}{3!} + \mathrm{o}\left(x^7\right)\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)^2\right)\right) \\ &= x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right) \end{aligned}$$

Corollaire 2.31 (Dérivation et DL)**.** *Soient I un intervalle ouvert voisinage de* 0 *et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est dérivable au voisinage de* 0 *et si f et f' admettent des développements limitésen zéro dordres $n+1$ et n respectivement, alors la partie régulière du* $\mathrm{DL}_n(0)$ *de f' est la dérivée de la partie régulière du* $\mathrm{DL}_0(n+1)$ *de f.*

2.2.5 Réciproques

Si f est une fonction qui admet un développement limite et qui est également bijective sur un intervalle I voisinage de a, on peut trouver un développement limite pour la fonction réciproque f^{-1} au voisinage de $f(a)$ de la manière suivante :

- On calcule d'abord le développement limité de f en a.
- On remarque qu'on peut écrire de façon formelle le développement limité de f^{-1} en $f(a)$ sous la forme:
$$f^{-1}(f(a) + h) = a + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right)$$
- Comme $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ on calcule formellement le développement limité de $f^{-1}(f(x))$ en composant des développements limités. Ensuite on peut utiliser l'unicité des développements limités.

Exemple 2.32 (TD Ex13)**.** On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$. Montrer que f est bijective et déterminer le développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 6. On commence par noter que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vient donné par

$$f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2} > 0.$$

En particulier f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ (elle en plus dérivable) alors f est une bijection.

Rappel 1 (Dérivée réciproque)**.** *Si f est une fonction injective avec réciproque f^{-1} et $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$ alors la fonction réciproque est différentiable en a et*

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}.$$

Notons que f' ne s'annule pas et alors la fonction réciproque est différentiable. Elle admet un développement limité à toute ordre en 0. En plus $f(0) = 0$ et donc $f^{-1}(0) = 0$. Ecrivons le $\mathrm{DL}_6\,(0)$ de f^{-1} comme

$$f^{-1}(y) = \underbrace{0}_{f^{-1}(0)} + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + a_5 y^5 + a_6 y^6 + o\left(y^6\right)$$

De plus,

$$\begin{aligned} f(x) = xe^{x^2} &= x \underbrace{\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o\left(x^6\right)\right)}_{e^{x^2}} \\ &= x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o\left(x^7\right) \end{aligned}$$

On pose $y = f(x) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o\left(x^7\right)$ et alors

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + 2x^4 + 2x^6 + o\left(x^6\right) \\ y^3 &= x^3 + 3x^5 + o\left(x^6\right) \\ y^4 &= x^4 + 4x^6 + o\left(x^6\right) \\ y^5 &= x^5 + o\left(x^6\right) \\ y^6 &= x^6 + o\left(x^6\right) \end{aligned}$$

Enfin, par composition on trouve que

$$\begin{aligned} x + o\left(x^6\right) = f^{-1}(f(x)) = a_1\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o\left(x^7\right)\right) + a_2\left(x^2 + 2x^4 + 2x^6 + o\left(x^6\right)\right) + a_3\left(x^3 + 3x^5 + o\left(x^6\right)\right) \\ + a_4\left(x^4 + 4x^6 + o\left(x^6\right)\right) + a_5\left(x^5 + o\left(x^6\right)\right) \\ + a_6\left(x^6 + o\left(x^6\right)\right) + o\left(x^6 + o\left(x^6\right)\right) \end{aligned}$$

Par unicité des développements limités on en déduit que

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 0 \\
a_1 + a_3 &= 0 \\
2a_2 + a_4 &= 0 \\
\frac{1}{2}a_1 + 3a_3 + a_5 &= 0 \\
2a_2 + 4a_4 + a_6 &= 0
\end{aligned}$$

Donc $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{5}{2}$, $a_6 = 0$. Finalement le développement limité pour la fonction f^{-1} vient donné par:

$$f^{-1}(y) = y - y^3 + \frac{5}{2}y^5 + \mathrm{o}\left(y^6\right).$$

3 Applications des développement limités

3.1 Calcul de limites et équivalentes

Les développements limités peuvent être utilises pour les calculs des limités.

Exercice 3.1 (Voir TD Ex7 -Ex8)**.** Étudier la limite éventuelle de f en a pour:

(3.1.1) $f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2}$ et $a = 0$. On commence par trouver le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f. Comme $\frac{\sin(x)}{x} > 0$ pour x dans un voisinage de 0 alors

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2} &= \exp\left(\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{3}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + O\left(x^4\right) \\
\ln(1-y) &= -y - \frac{y^2}{2} + O\left(y^3\right)
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{3}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) &= \exp\left(\frac{3}{x^2}\ln\left(1 - \underbrace{\left[\frac{x^2}{6} - \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)\right]}_{y}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{3}{x^2}\left[\left(-\frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6} - \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)\right)^2 + \mathrm{o}\left(y^2\right)\right]\right)
\end{aligned}$$

Or, $y^2 = \mathrm{o}(x^3) = \mathrm{o}(x^2)$. Donc,

$$\exp\left(\frac{3}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{x^2}\mathrm{o}(x^2)\right)\exp\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)\right).$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

(3.1.2) $f(x) = \frac{1-x+\ln(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}}$ et $a = 1$. Fait en cours!

(3.1.3) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}}{x^2}$ en $a = 0$. On commence par noter que

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$
$$\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} = 1 + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \underbrace{\mathrm{o}\left(\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\right)}_{\mathrm{o}(x^2)}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) - \left(1 + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\
&= x - \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^2}{(x+1)^2}\right) + \mathrm{o}\left(x^2\right) \\
&= \frac{x^2}{x+1} + \underbrace{\frac{1}{2}x^2\left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) + \mathrm{o}\left(x^2\right)}_{=\mathrm{o}(x^2)} \\
&= \frac{x^2}{x+1} + \mathrm{o}\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

De cette manière on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{x+1} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+1} + \mathrm{o}(1)\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

> **Attention! 1.** *Dans le exercice précédente si on calcule les développements limités à l'ordre* 1 *on obtient* 0 *comme limite ce qui est faux !*

(3.1.4) Soient $a, b, c > 0$. Trouver la limite de $f(x) = \left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x$ lorsque $x \to +\infty$. On pose $y = \frac{1}{x}$. Alors $y \to 0^+$ quand $x \to \infty$. Donc,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{a^y + b^y + c^y}{3}\right)^{1/y}$$

On peut d'abord noter que pour tout $\alpha > 0$

$$\alpha^y = \exp\left(\ln\left(\alpha^y\right)\right) = \exp\left(y\ln(\alpha)\right) = 1 + y\ln(\alpha) + \mathrm{o}(y)$$

Comme $a, b, c > 0$ on peut alors écrire

$$\begin{aligned} a^y + b^y + c^y &= 3 + y\underbrace{(\ln(a) + \ln(b) + \ln(c))}_{\ln(abc)} + \mathrm{o}(y) \\ &= 3 + y\ln(abc) + \mathrm{o}(y) \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^y + b^y + c^y}{3}\right)^{1/y} &= \left(\frac{3 + y\ln(abc) + \mathrm{o}(y)}{3}\right)^{1/y} \\ &= \left(1 + y\frac{\ln(abc)}{3} + \mathrm{o}(y)\right)^{1/y} \\ &= \exp\left(\frac{1}{y}\ln\left(1 + \underbrace{y\ln(abc)^{1/3} + \mathrm{o}(y)}_{z}\right)\right) \end{aligned}$$

Or, le développement limité de la fonction $z \longmapsto \ln(1+z)$ en 0 à l'ordre 1 est:

$$\ln(1+z) = z + \mathrm{o}(z)$$

Donc, par composition on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^y + b^y + c^y}{3}\right)^{1/y} &= \exp\left(\frac{1}{y}\left(y\ln(abc)^{1/3} + \mathrm{o}(y) + \mathrm{o}\left(y\ln(abc)^{1/3} + \mathrm{o}(y)\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{y}\left(y\ln(abc)^{1/3} + \mathrm{o}(y)\right) + \frac{1}{y}\mathrm{o}(y)\right) \\ &= \exp\left(\ln(abc)^{1/3} + \mathrm{o}(1)\right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{y\to 0^+} \left(\frac{a^y + b^y + c^y}{3}\right)^{1/y} = \lim_{y\to 0^+} \exp\left(\ln(abc)^{1/3} + \mathrm{o}(1)\right) = \ln(abc)^{1/3}$$

Dans la Proposition 2.16 on a vu que deux fonctions f et g sont équivalentes en a si et seulement si $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}(g(x))$. Pour calculer un équivalent simple d'une fonction f il suffit donc de calculer un développement limité. Le premier terme non nul avant la "petite o" nous donne alors l'équivalent cherché.

Exercice 3.2 (Voir TD Ex9). En utilisant des developpements limites, calculer un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes:

(3.2.1) $f(x) = \ln(2^x + 3^x - 5^x)$. D'après l'exercice (3.1.4) on a que pour tout $a > 0$

$$a^x = 1 + x\ln(a) + \mathrm{o}(x)$$

Alors,

$$\begin{aligned}\ln\left(2^x + 3^x - 5^x\right) &= \ln\left(1 + x\ln(2) + 1 + x\ln(3) - 1 - x\ln(5) + \mathrm{o}(x)\right)\\ &= \ln\left(1 + \underbrace{\left(x\ln\left(\frac{6}{5}\right) + \mathrm{o}(x)\right)}_{z}\right)\end{aligned}$$

Or, le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $\ln(1+z)$ est

$$\ln(1+z) = z + \mathrm{o}(z)$$

Donc par composition:

$$\begin{aligned}\ln\left(2^x + 3^x - 5^x\right) &= x\ln\left(\frac{6}{5}\right) + \mathrm{o}(x)\\ &= x\ln\left(\frac{6}{5}\right)(1 + \mathrm{o}(1))\end{aligned}$$

On en déduit que l'équivalent simple de $f(x)$ en 0 est $x\ln\left(\frac{6}{5}\right)$.

(3.2.2) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\arcsin x)^2}$.

3.2 Calcul de la position par rapport à une tangente

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ de la forme

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^1\right)$$

alors on a vu que f est dérivable en a (voir Proposition 2.17) et, par la formule de Taylor-Young et la unicité des développements limités, on a que $\alpha_0 = f(a)$ et $\alpha_1 = f'(a)$. Par conséquent le $\mathrm{DL}_1(a)$ de f donne l'équation de la tangente au graphe de f au point des abscisses $x = a$; cette droite est alors décrit par l'équation:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1(x-a).$$

On peut alors étudier localement la position de la graphe de f par rapport à la tangente : Si au voisinage de a on a:

- $f(x) - (\alpha_0 + \alpha_1(x-a)) \geq 0$ alors la courbe de f est au-dessus de sa tangente.
- $f(x) - (\alpha_0 + \alpha_1(x-a)) \leq 0$ alors la courbe de f est au-dessous de sa tangente.

Pour déterminer la position relative du graphe de la fonction f et de sa tangente, localement autour du point $(a, f(a))$, il faut pousser le développement limité un peu plus loin pour obtenir un terme non nul d'ordre ≥ 2 dans la partie régulière. Autrement dit, si le développement limité de f s'écrit comme

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_p(x-a)^p + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^p\right)$$

avec $\alpha_p \neq 0$, on en déduit que $f(x) - ((\alpha_0 + \alpha_1(x-a))) \sim_a \alpha_p(x-a)^p$. Le signe de $f(x) - ((\alpha_0 + \alpha_1(x-a)))$ au voisinage de a est alors déterminé par le signe de $\alpha_p(x-a)^p$.

Exercice 3.3 (TD E10-E11)**.**

(3.3.1) Étudier lallure de la courbe représentative de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ au voisinage de a pour $a = 0$ et $a = 1$.

On commence par le cas où $a = 0$. Rappelons que le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ vient donné par

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$

Donc, par la Proposition 2.20 on a que

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{2x}{1+x^2} &= 2x(1 - x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)) = 2x - 2x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= \underbrace{0}_{f(0)} + \underbrace{2}_{f'(0)} x - 2x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Alors,

$$\underbrace{f(x)}_{\text{fonction}} - \underbrace{2x}_{\text{Droite tangente}} = -2x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Le signe de la différence entre la fonction est sa droite tangent au voisinage de 0 vient déterminé par le signe de $-2x^3$. Cette dernière fonction est positive lorsque $x < 0$ et donc on peut en déduire que si $x < 0$ alors la fonction est au-dessus de sa tangente. De même si $x > 0$ le signe de la fonction $-2x^3$ est négative et alors dans ce cas la fonction est au-dessous de sa tangente (Voir Figure 1).

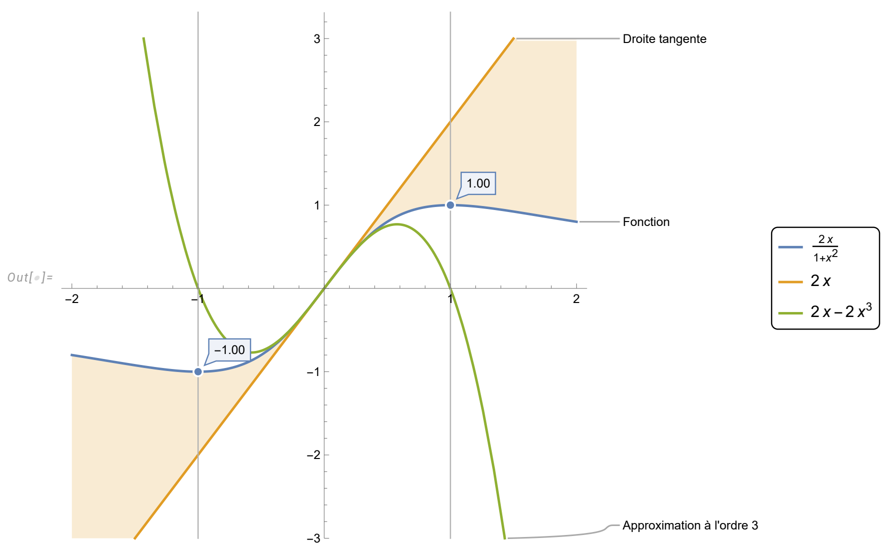

Figure 1: $a = 0$

Le cas où $a = 1$ est similaire. On peut d'abord faire le changement de variable $y = x - 1$ pour trouver le $\mathrm{DL}_2(1)$ de $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(y+1) &= \frac{2(y+1)}{1+(y+1)^2} \\
&= \frac{2(y+1)}{1+y^2+2y+1} \\
&= \frac{2(y+1)}{2+2y+y^2} \\
&= \frac{y+1}{1+\left(y+\frac{y^2}{2}\right)} \\
&= (y+1)\left(1-z+z^2+\mathrm{o}\left(z^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

où $z = y + \frac{y^2}{2}$. On obtient alors

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (y+1)\left(1-y-\frac{y^2}{2}+\left(y+\frac{y^2}{2}\right)^2+\mathrm{o}\left(\left(y+\frac{y^2}{2}\right)^2\right)\right) \\
&= (y+1)\left(1-y-\frac{y^2}{2}+y^2+\mathrm{o}\left(y^2\right)\right) \\
&= (y+1)\left(1-y+\frac{y^2}{2}+\mathrm{o}\left(y^2\right)\right) \\
&= y-y^2+1-y+\frac{y^2}{2}+y^2+\mathrm{o}\left(y^2\right) \\
&= 1-\frac{y^2}{2}+\mathrm{o}\left(y^2\right) \\
&= 1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)
\end{aligned}
$$

Alors, la tangente à f en $x = 1$ est la droite d'équation $y = 1$ et le signe de la différence entre la fonction f et sa droite tangente dans un voisinage de 1 est déterminé par le signe de $-\frac{1}{2}(x-1)^2$. Cette dernière fonction est toujours négative, donc dans un voisinage de 1 la fonction f doit être au-dessous de sa tangente (voir Figure 2).

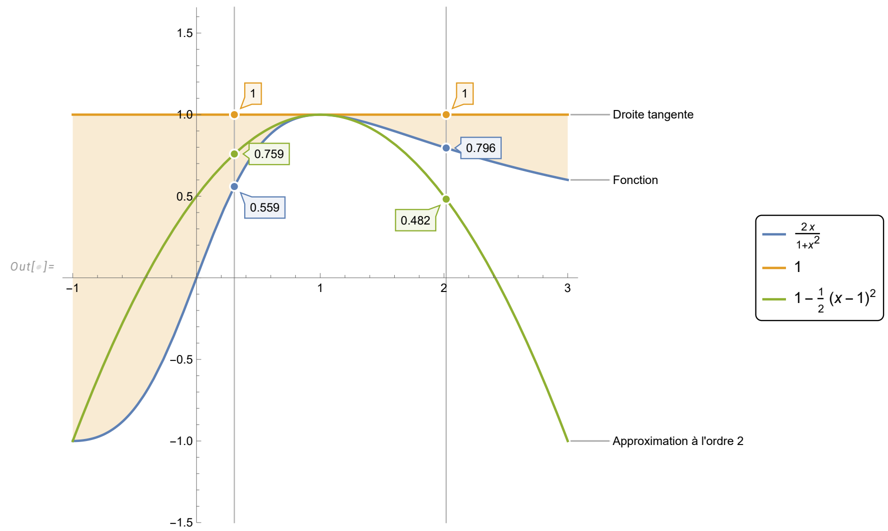

Figure 2: $a = 1$

(3.3.2) Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions suivantes au voisinage de l'origine :

$$f(x) = x\sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}} \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan(x).$$

3.3 Calcul d'une dérivée k-iéme en un point

Soit f une fonction n-fois dérivable au voisinage d'un point a. Alors par 2.7 (Taylor-Young), f admet un développement limité en a à l'ordre n. Si on calcule un autre $\mathrm{DL}_n(a)$ par un autre méthode (par exemple en utilisant des opérations entre développement limités), la unicité des développement limités implique l'égalite des coefficients de chaque x^k. Cela permet d'en déduire la valeur de $f^k(a)$ pour $0 \leq k \leq n$. On va illustrer cette situation avec un exemple :

Exemple 3.4. Le $\mathrm{DL}_n(0)$ de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ est donné par

$$\mathrm{e}^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$$

Par contre la fonction f est infiniment différentiable, donc le Theorem 2.7 implique que

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(2n)}(0)}{2n!}x^{2n} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$$

En utilisant la unicité des développements limitéson peut identifier les coefficients et trouver que

$$\frac{f^{(2n)(0)}}{(2n)!} = \frac{1}{n!} \Rightarrow f^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}$$

Par exemple, avec cette technique on pourrait facilement calculer $f^{(48)}(0)$.

3.4 Calcul d'asymtptote oblique

3.5 Courbes paramétriques planes