Université d'Angers
U.F.R. SCIENCES

2023-2024
SANTIAGO TORO

L1 LICENCE DE MATHÉMATIQUES
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE
Feuille de TD n°1

Équations cartésienne et paramétrique d'une droite

Exercice 1.

(1.1) Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par l'équation $2x - y + 6 = 0$. Déterminer une paramétrisation de $\mathcal{D}$.

(1.2) Même question pour $\mathcal{D}_a : 2x - 3ay + 4 = 0$ où $a \in \mathbb{R}$.

(1.3) Soit $\mathcal{D}$ la droite du plan définie par la paramétrisation $x = 2 - t$ et $y = -1 + 3t$, pour $t \in \mathbb{R}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

Correction.

(1) Commençons par remarquer que $(-3, 0)$ est un point de la droite $\mathcal{D}$ car:

$$2(-3) - (0) + 6 = -6 + 6 = 0$$

> **Rappel 1.** *Si $\mathcal{D} : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, alors (β, α) est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Réciproquement, si $\vec{v} = (a, b)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D} : bx + ay + c = 0$.*

De plus, le vecteur avec coordonnées (dans la base canonique) $(1, 2)$ est un vecteur directeur pour $\mathcal{D}$. Alors,

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 0 + 2t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

(2) Si $a \neq 0$, un raisonnement similaire à celui qu'on a fait dans (1) montre que

$$\mathcal{D}_a : \begin{cases} x = -2 + 3at \\ y = 0 + 2t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

est une paramétrisation pour $\mathcal{D}_a$. En outre, si $a = 0$ alors $\mathcal{D}_0$ vient donné par

$$2x + 4 = 0 \iff x = -2.$$

Autrement dit, la droite $\mathcal{D}_0$ est une droite vertical passant, par exemple, par le point $(-2, 1)$. Le vecteur des coordonnées $(0, 1)$ est alors un vecteur directeur. Une possible paramétrisation de $\mathcal{D}_0$ est alors:

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 (Cas particulier du théorème de Desargues).
On considère les trois droites $\mathcal{D}_1 : y = 0$, $\mathcal{D}_2 : x = 0$, $\mathcal{D}_3 : -2x + y$ ainsi que les six points $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (0, 1)$, $A_3 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $B_1 = (2, 0)$, $B_2 = (0, 4)$ et $B_3 = (t, 2t)$, où $t \in \mathbb{R}$.

(2.1) Faire un dessin pour $t = \frac{3}{2}$. Justifier que $B_3 \in \mathcal{D}_3$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2.2) Déterminer toutes les valeurs de t pour lesquelles les trois couples de droites

$$(A_1A_2) \text{ et } (B_1B_2), \quad (A_2A_3) \text{ et } (B_2B_3), \quad (A_3A_1) \text{ et } (B_3B_1)$$

s'intersectent en C_3, C_1 et C_2 respectivement.

(2.3) Quand les points C_1,C_2,C_3 existent, montrer qu'ils sont alignés.

(2.4) Que peut-on dire quand les trois points d'intersection n'existent pas tous?

Correction.
à compléter

Exercice 3.
On considere les points $P = (-1, 1)$, $B = (2, -1)$ et $C = (1, 3)$. Soit Q le point du plan tel que $\overrightarrow{BQ} = 3\overrightarrow{QC}$.

(3.1) Après avoir fait un dessin, donner une équation décrivant la droite (PQ) ; d'abord une équation paramétrée puis une équation cartésienne.

(3.2) Déterminer le point A, point d'intersection de la droite (BP) et de la droite parallèle à (PQ) passant par C.

(3.3) Si M est le point d'intersection de (AQ) et (CP), donner la relation vérifiée par les vecteurs

Correction.
À compléter

Exercice 4 (Faisceau de droites).
Pour tout $\frac{-\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on note $\vec{v}_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2$.

(4.1) Soit $A = (a, b)$ un point du plan affine. Montrer que pour toute droite $\mathcal{D}$ passant par A, il existe $\theta_{\mathcal{D}} \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\mathcal{D}$ soit décrite par $(x, y) = (a, b) + t\vec{v}_{\theta_{\mathcal{D}}}$, $t \in \mathbb{R}$.

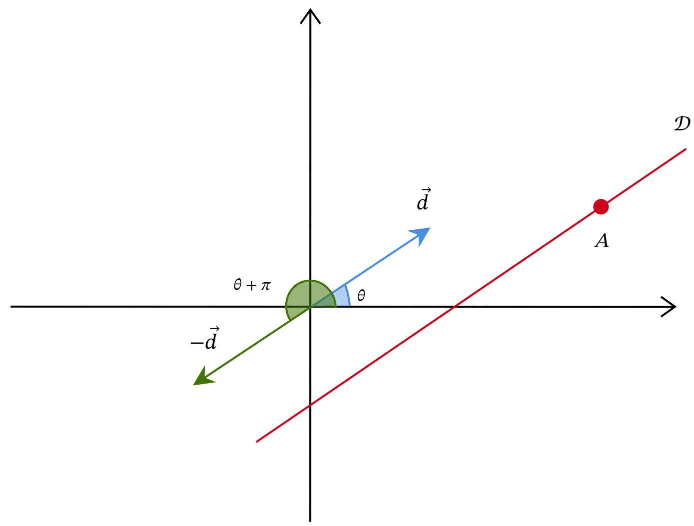
(4.2) Soit $A = (\sqrt{3}, -1)$. Pour chaque droite $\mathcal{D}$ passant par A, on note, quand ces points existent, $X_{\mathcal{D}}$ et $Y_{\mathcal{D}}$ les points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement. Déterminer toutes les droites passant par A pour lesquelles $X_{\mathcal{D}}$ soit strictement entre A et $Y_{\mathcal{D}}$.

Correction.

(1) Soit $\mathcal{D}$ une droite qui passe par le point $A = (a, b)$. La droite $\mathcal{D}$ peut alors être décrite par les équations paramétriques:

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = a + d_0 t \\ y = b + d_1 t \end{cases}$$

où $\vec{d} = (d_0, d_1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.



Comme tout multiple non nul de $\vec{d}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ alors on peut, sans perte de généralité, supposer que $\vec{d}$ est de norme 1. Cela veut dire que

$$d_0^2 + d_1^2 = 1.$$

Le vecteur $\vec{d} = (d_0, d_1)$ est donc sur le cercle trigonométrique de rayon 1. Cela implique qu'il existe un $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$\begin{aligned} d_0 &= \cos(\theta) \\ d_1 &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

Pour chaque droite, il existe deux tels angles: θ et $\theta + \pi$ car $-\vec{d}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ (voir figure précédente). Ainsi, si on se restreint à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on obtient, pour chaque droite $\mathcal{D}$, un unique $\theta_{\mathcal{D}}$.

(2) Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A d'équation:

$$ax + by + c = 0$$

Le point $X_{\mathcal{D}}$ existe lorsque le système des équations linéaires:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

admets une solution. Cela est donc équivalent a demander que $a \neq 0$ car en remplaçant $y = 0$ on trouve:

$$\begin{aligned} ax + c &= 0 \\ ax &= -c \\ x &= \frac{-c}{a} \iff a \neq 0 \end{aligned}$$

Une raisonnement analogue implique que le point $Y_{\mathcal{D}}$ existe lorsque $b \neq 0$. Dans ces deux cas on obtient:

$$X_{\mathcal{D}} = \left(-\frac{c}{a}, 0\right) \quad Y_{\mathcal{D}} = \left(0, -\frac{c}{b}\right)$$

Pour déterminer les cas où $X_{\mathcal{D}}$ es strictement inclus entre A et $Y_{\mathcal{D}}$ il suffit d'étudier quand le point $X_{\mathcal{D}}$ est contenu dans le segment joignant les points A et $Y_{\mathcal{D}}$ (le segment est inclus dans la droite $\mathcal{D}$!). C'est exactement les cas où il existe $\lambda \in (0,1)$ tel que

$$\left(-\frac{c}{a}, 0\right) = X_{\mathcal{D}} = \lambda A + (1-\lambda)Y_{\mathcal{D}} = \lambda(\sqrt{3}, -1) + (1-\lambda)\left(0, -\frac{c}{b}\right)$$

On trouve alors

$$0 < -\frac{c}{a\sqrt{3}} < 1.$$

Le côté gauche de cette inégalité implique que c et a sont de signe différents. C'est à dire, si $c > 0$ alors $a < 0$ et vice-versa si $c < 0$ alors $a > 0$. On a donc deux cas:

- Si $c > 0$ alors $-a > 0$ et le coté droit de l'inégalité s'écrit

  $$c < -a\sqrt{(3)},$$

  mais comme $A \in \mathcal{D}$, cela implique que

  $$c - b = -a\sqrt{3}$$

  On a donc que $c - b < -a\sqrt{3} - b$ et ainsi $b < 0$.
- De la même façon, si $c < 0$ alors $-a < 0$ et le coté droit de l'inégalite s'écrit cette fois sous la forme

  $$c > -a\sqrt{3}.$$

  En utilisant le même raisonnement du cas précédente on obtient $b > 0$.

Exercice 5 (Déterminant de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$).

(5.1) Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$. L'expression $\vec{v}_x\vec{w}_y - \vec{v}_y\vec{w}_x$ est appelée le *déterminant des vecteurs* $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (dans la base canonique). Cette expression est notée par $\det(\vec{v}, \vec{w})$. Montrer que

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow \det(\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

(5.2) On considère les droites

$$\mathcal{D}_1 : (m+1)x + (m^2 - 3m - 10)y - 1$$
$$\mathcal{D}_2 : 2x - 5y + 6 = 0,$$

où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Trouver tous les m pour lesquels $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles.

Correction.

(1) Les vecteurs $\vec{v} = (\vec{v}_x, \vec{v}_y)$ et $\vec{w} = (\vec{w}_x, \vec{w}_y)$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{w}$. Donc,

$$\begin{aligned}\det(\vec{v}, \vec{w}) &= \vec{v}_x\vec{w}_y - \vec{v}_y\vec{w}_x \\ &= \lambda\vec{w}_x\vec{w}_y - \lambda\vec{w}_y\vec{w}_x \\ &= \lambda\left(\vec{w}_x\vec{w}_y - \vec{w}_x\vec{w}_y\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Réciproquement, si on suppose que $\det(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{v}_x\vec{w}_y - \vec{v}_y\vec{w}_x = 0$ alors $\vec{v}_x\vec{w}_y = \vec{v}_y\vec{w}_x$. On peut alors raisonner en considérant plusieurs cas:

- Si $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{w} = \vec{0}$ alors c'est évident que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.
- Si $\vec{v}_y \neq 0$ et $\vec{v}_x = 0$ (resp., $\vec{v}_x \neq 0$ et $\vec{v}_y = 0$) alors $\vec{v}_y\vec{w}_x = 0$ (resp., $\vec{v}_x\vec{w}_y = 0$). Cela implique que $\vec{w}_x = 0$ (resp., $\vec{w}_y = 0$) et on peut écrire

$$\vec{w} = (0, \vec{w}_x) = \frac{\vec{w}_x}{\vec{v}_y}(0, \vec{v}_y) = \underbrace{\frac{\vec{w}_x}{\vec{v}_y}\vec{v}}_{\lambda\cdot\vec{v}}$$

  (resp., $\vec{w}=\frac{\vec{w}_x}{\vec{v}_x}\vec{v}$). Le même raisonnement peut être appliquer au vecteur $v\vec{w}$.
- On peut donc supposer que $\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{w}_x$ et $\vec{w}_y$ sont tous non nuls. Dans ce cas il suffit de considérer $\lambda = \frac{\vec{w}_x}{\vec{v}_x} = \frac{\vec{w}_y}{\vec{v}_y}$ et noter que:

$$\begin{aligned}\vec{w}_x &= \lambda\vec{v}_x \\ \vec{w}_y &= \lambda\vec{v}_y\end{aligned}$$

  En conséquence $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

(2) On a que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ son colinéaires. Il suffit alors de calculer des vecteurs directeurs $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ et utiliser (5.1). On peut considérer

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -m^2 + 3m + 10 \\ m + 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le calcul du déterminant nous donne:

$$\begin{aligned}\det(\vec{d}_1, \vec{d}_2) &= (-m^2 + 3m + 10)(2) - (m + 1)(5) \\ &= -2m^2 + 6m + 20 - 5m - 5 \\ &= -2m^2 + m + 15\end{aligned}$$

Alors, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles si et seulement si $-2m^2 + m + 15 = 0$, ce qui nous donne $m = -\frac{5}{2}$ ou $m = 3$.

Exercice 6.
Soient $\mathcal{D}_1 : (\lambda - 1)x - (2\lambda - 5)y + 3 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : (2\lambda + 3)x + (\lambda + 5)y - 8 = 0$. Déterminer les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que

(6.1) Les droites soient parallèles,

(6.2) Le vecteur $\vec{n}_1 = (\lambda - 1, -(2\lambda - 5))$ soit le vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$. (Cette condition signifie que les droits sont perpendiculaires ; la définition de la perpendicularité utilisera le produit scalaire qui sera vu plus tard en cours).

Correction.

(1) On commence par calculer des vecteurs directeurs $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ pour $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement:

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 2\lambda - 5 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -(\lambda + 5) \\ 2\lambda + 3 \end{pmatrix}$$

Par le même raisonnement utilise dans (5.2) les droites sont parallèles si et seulement si $\det(\vec{d}_1, \vec{d}_2) = 0$, c'est-à-dire:

$$(2\lambda - 5)(2\lambda - 3) - (-(\lambda + 5))(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

(2) Le vecteur $\vec{n}_1$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ si et seulement si $\vec{n}_1$ est parallèle au vecteur $\vec{d}_2$. Ceci équivaut encore à demander que $\det(\vec{n}_1, \vec{d}_2) = 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \det(\vec{n}_1, \vec{d}_1) = 0 &\Leftrightarrow (\lambda - 1)(2\lambda + 3) - (2\lambda - 5)(\lambda + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2\lambda^2 + \lambda - 3) - (2\lambda^2 + 5\lambda - 25) = 0 \\ &\Leftrightarrow 22 - 4\lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

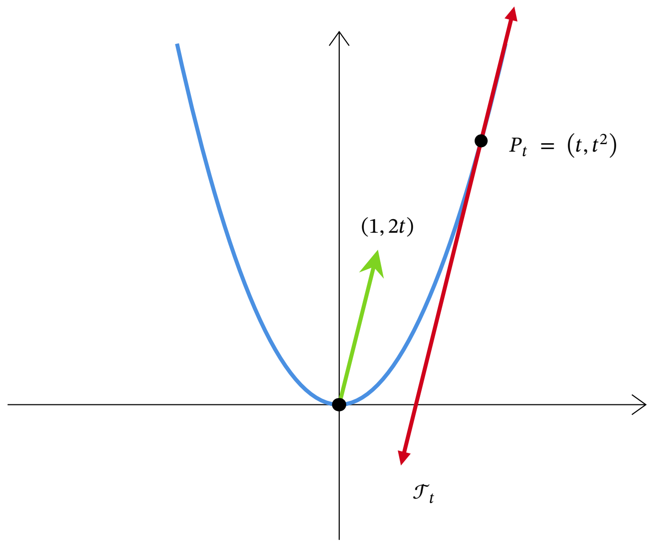
Exercice 7.
On considère la parabole $\Gamma : y = x^2$ (c'est à dire le graph de la fonction $f(x) = x^2$) et le point $A = (2, -5)$. Soit $P_t = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de Γ.

(7.1) Écrire une équation cartésienne pour $\mathcal{T}_t$, la droite tangente à Γ en P_t et donner le vecteur directeur de cette droite dont la première coordonnée vaut 1.

(7.2) Trouver les t pour lequels $(AP_t) = \mathcal{T}_t$.

Correction.

(1) Soit $\mathcal{T}_t$ la droite tangente à Γ en P_t:



> **Rappel 2.** *La tangente au graphe d'une fonction f en a est la droite d'équation*
> $$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

En utilisant le Rappel 2 on trouve que la droite $\mathcal{T}_t$ a une équation donné par:

$$y = 2t(x - t) + t^2$$

Cette équation écrit sous forme standard a la forme

$$2tx - y - t^2 = 0.$$

Un vecteur directeur de $\mathcal{T}_t$ est donc $\vec{v}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$.

(2) Le point P_t appartient à la droite $(\mathcal{T}_t)$ ainsi qu'à la droite (AP_t) donc les deux droites coïncident si et seulement si A se trouve sur la droite $\mathcal{T}_t$. Alors,

$$\begin{aligned} (AP_t) = \mathcal{T}_t &\Leftrightarrow A \text{ vérifie l'équation de } \mathcal{T}_t \\ &\Leftrightarrow 2t(2) - (-5) - t^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t - 5)(t + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 5 \text{ ou } t = -1. \end{aligned}$$

Produit scalaire et distance dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 8.
Soit $A = (0, 4)$ et soit $\mathcal{D}$ la droite des abscisses, c'est-à-dire $\mathcal{D} : y = 0$. On considère le point $P_s = (s, 0) \in \mathcal{D}$, $s \in \mathbb{R}$.

(8.1) Trouver un point $Q_s \in \mathcal{D}$ tel que (AP_s) et (AQ_s) soient perpendiculaires.

(8.2) Calculer la distance P_sQ_s.

(8.3) Pour quel(s) $s \in \mathbb{R}$ la longueur de l'hypoténuse du triangle $[AP_sQ_s]$ vaut-elle 10?

Correction.

(1) **Première façon:** Soit $s \in \mathbb{R}$. On cherche un point $Q_s = (q_s, 0) \in \mathcal{D}$ tel que les droites (AP_s) et (AQ_s) soient perpendiculaires. On commence par noter que si $s = 0$ alors la droite (AP_s) est la droite correspondante à l'axe des ordonnées, i.e, $(AP_s) : x = 0$. Dans ce cas, il n'existe pas de point $Q_s = (q_s, 0)$ sur la droite $\mathcal{D}$ tel que la droite (AQ_s) soit perpendiculaire à (AP_s). Sinon, le vecteur directeur de la droite (AP_s) serait perpendiculaire àu vecteur directeur de la droite (AQ_s). Cependant, notons que

$$\overrightarrow{AQ_s} = \begin{pmatrix} q_s \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AP_s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Alors, le produit scalaire entre ces deux vecteurs devrait être zéro. Par contre on a:

$$\begin{pmatrix} q_s \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -16 \neq 0$$

En autre, lorsque $s = 0$, il n'existe pas de point Q_s avec la propriété souhaitée.

Rappel 3. *Soient $A = (x_0, y_0)$ et $B = (x_1, y_1)$ deux points tels que $|x_1 - x_0| \neq 0$. Une équation pour la droite qui passe par A et B est*

$$y = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + y_0.$$

Supposons alors que $s \neq 0$. Dans ce cas, on peut utiliser le Rappel 3 pour trouver une équation de la droite (AP_s) :

$$y = \frac{(4-0)}{(0-s)}(x - s) + 0$$

$$y = -\frac{4}{s}x + 4 \qquad (8.1)$$

Le scalaire $-\frac{4}{s}$ est appelée le *coefficient directeur* de la droite (AP_s).

Rappel 4. *Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites définies par les équations $y = m_1x + b_1$ et $y = m_2x + b_2$. Les droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs m_1m_2 est égal à -1. Si les droites sont définies par les équations*

$$\mathcal{D}_1 : ax + by + c = 0$$
$$\mathcal{D}_2 : a'x + b'y + c' = 0$$

Alors les droites sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

Par le Rappel 4 on trouve que la droite passant par A et perpendiculaire à (AP_s) est la droite avec coefficient directeur m tel que:

$$m \cdot \left(-\frac{4}{s}\right) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{s}{4}$$

Alors, une équation de cette droite est:

$$y = \frac{s}{4}(x-0) + 4$$
$$y = \frac{s}{4}x + 4$$

Le point $Q_s = (q_s, 0)$ appartient à cette droite si et seulement si

$$\frac{s}{4}q_s + 4 = 0 \Leftrightarrow q_s = -\frac{16}{s}$$

En conclusion $Q_s = \left(-\frac{16}{s}, 0\right)$.

Deuxième façon (plus courte): Chercher un point $Q_s = (q_s, 0)$ tel que (AP_s) et (AQ_s) soient perpendiculaires se traduit par l'équation:

$$\overrightarrow{AP_s} \cdot \overrightarrow{AQ_s} = 0 \tag{8.2}$$

Comme $\overrightarrow{AQ_s} = \begin{pmatrix} q_s \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AP_s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors l'équation (8.2) se réécrit comme :

$$q_s s + 16 = 0$$

Notons que cette équation n'a pas de solution lorsque $s = 0$. Dans le cas où $s \neq 0$ on trouve à nouveau que

$$q_s = -\frac{16}{s}.$$

(2) Soit $s \neq 0$. On veut calculer la distance entre les points $P_s = (s, 0)$ et $Q_s = (-\frac{16}{s}, 0)$. D'après le rappel suivante:

Rappel 5.
(1) *La distance entre deux points $A = (x_0, y_0)$ et $B = (x_1, y_1)$ vient donné par*

$$\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

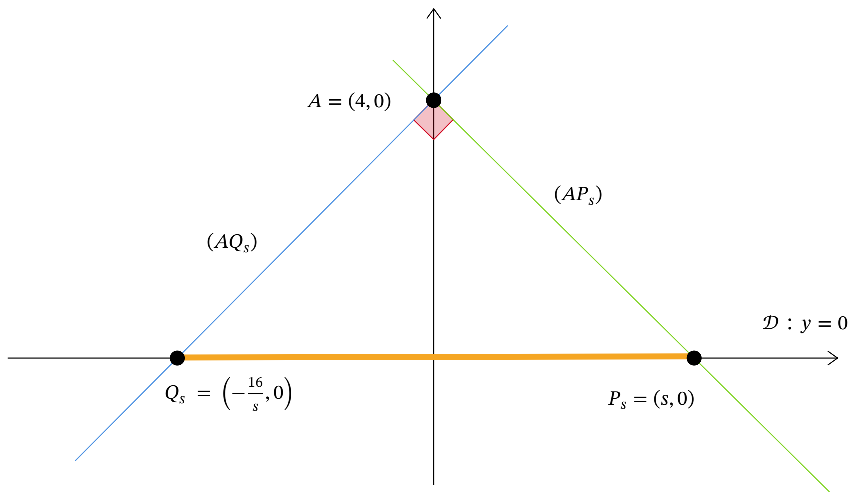
(2) *La distance d'un point $A = (x_0, y_0)$ à une droite d'équation $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ est*

$$\mathrm{d}(A, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

On a que

$$\mathrm{d}(P_s, Q_s) = \sqrt{\left(-\frac{16}{s} - s\right)^2} = \left|-\frac{16}{s} - s\right| = \left|\frac{16}{s} + s\right|$$

(3) Soit $s \neq 0$. L'hypotenuse du triangle $[AP_sQ_s]$ est le segment $[P_sQ_s]$:



Alors

$$P_sQ_s = 10 \Leftrightarrow \left|\frac{16}{s} + s\right| = 10 \Leftrightarrow \frac{16+s^2}{|s|} = 10 \tag{8.3}$$

Par définition du valeur absolue, si $s > 0$ l'équation précédente devient $16 + s^2 = 10s$ et en conséquence:

$$16 + s^2 = 10s \Leftrightarrow s^2 - 10s + 16 = 0 \Leftrightarrow (s-8)(s-2) = 0 \Leftrightarrow s = 8 \text{ ou } s = 2.$$

De même, si $s < 0$ l'équation (8.3) s'écrit comme

$$\frac{16+s^2}{-s} = 10 \Leftrightarrow s^2 + 10s + 16 = 0 \Leftrightarrow (s+8)(s+2) = 0 \Leftrightarrow s = -8 \text{ ou } s = -2.$$

On conclut que la longueur de l'hypotenuse du triangle $[AP_sQ_s]$ vaut 10 si et seulement si $s = \pm 2, \pm 8$.

Exercice 9.
Dans le plan affine euclidien $\mathbb{E}^2$, on considère les points $A = (1,1)$ et $P_t = (t, t^2)$, où $t > 1$ joue le rôle d'un paramètre.

(9.1) Calculer $\lim_{t\to 1^+} \frac{\overrightarrow{AP_t}}{\|\overrightarrow{AP_t}\|}$. (La limite d'un vecteur est calculée composant par composante).

(9.2) Calculer cette limite en $\pm\infty$. Conjecturer la réponse si on remplace A par un point $B = (b, b^2)$.

Correction.

(1) Soit $t > 1$. On commence par calculer coordonnées dans la base canonique pour le vecteur $\overrightarrow{AP_t}$:

$$\overrightarrow{AP_t} = P_t - A = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{AP_t}\| &= \sqrt{(t-1)^2+(t^2-1)^2} \\
&= \sqrt{(t-1)^2(1+(t-1)^2)} \\
&= \sqrt{(t-1)^2(t^2+2t+2)} && t>1 \\
&= (t-1)\sqrt{t^2+2t+2}
\end{aligned}$$

De sorte que,

$$\frac{\overrightarrow{AP_t}}{\|\overrightarrow{AP_t}\|} = \frac{1}{(t-1)\sqrt{t^2+2t+2}}\begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}$$

Finalement, on calcule la limite composant par composant:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1^+} \frac{1}{(t-1)\sqrt{t^2+2t+2}}\begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lim\limits_{t\to 1^+} \dfrac{t-1}{(t-1)\sqrt{t^2+2t+2}} \\ \lim\limits_{t\to 1^+} \dfrac{(t-1)(t+1)}{(t-1)\sqrt{t^2+2t+2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lim\limits_{t\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{t^2+2t+2}} \\ \lim\limits_{t\to 1^+} \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(2) Calculons maintenant la limite en $\pm\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to \infty} \frac{1}{(t-1)\sqrt{t^2+2t+2}}\begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lim\limits_{t\to \infty} \dfrac{t-1}{(t-1)\sqrt{t^2+2t+2}} \\ \lim\limits_{t\to \infty} \dfrac{t^2-1}{(t-1)\sqrt{t^2+2t+2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Un calcule similaire montre que

$$\lim_{t\to -\infty} \frac{1}{\sqrt{(t-1)^2(t^2+2t+2)}}\begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si on remplace A par un point (b, b^2) on trouve que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t-b}{\sqrt{(t-b)^2+(t^2-b^2)^2}} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2-b^2}{\sqrt{(t-b)^2+(t^2-b^2)^2}} = 1$$

Ainsi,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\overrightarrow{AP_t}}{\|\overrightarrow{AP_t}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un calcul similaire montre que la limite en $-\infty$ est aussi $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10.
Soient $A = (-3, 1)$, $B = (2, 13)$ et $C_s = (s, 5)$ avec $s \in \mathbb{R}$. Pour chaque s déterminer le point $P_s \in (AB)$ tel que (C_sP_s) soit perpendiculaire à (AB). Pour quel $s \in \mathbb{R}$ a-t-on $C_sP_s = 4$.

Correction.
Soit $P_s = (x_0, y_0)$ point dans la droite (AB) tel que (C_sP_s) es perpendiculaire à la droite (AB). La droite (AB) possède une équation paramétrée de la forme:

$$(AB) : \begin{cases} x = -3 + 5\,t \\ y = \underbrace{1}_{A} + \underbrace{12}_{B-A}\,t \end{cases}$$

De même, la droite (C_sP_s) possède une équation paramétrée:

$$(C_sP_s) : \begin{cases} x = s + (x_0 - s)\,t \\ y = \underbrace{5}_{C_s} + \underbrace{(y_0 - 5)}_{P_s - C_s}\,t \end{cases}$$

Alors, (AB) est perpendiculaire à (C_sP_s) si et seulement si le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au vecteur $\begin{pmatrix} x_0 - s \\ y_0 - 5 \end{pmatrix}$. Ceci est équivalente à

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 - s \\ y_0 - 5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5(x_0 - s) + 12(y_0 - 5) = 0 \Leftrightarrow 5x_0 - 5s + 12y_0 - 60 = 0 \tag{10.1}$$

D'autre part, le point $P_s = (x_0, y_0)$ appartient à la droite (AB) alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que:

$$x_0 = -3 + 5t_0$$
$$y_0 = 1 + 12t_0$$

En combinant l'équation (10.1) avec les deux équations ci-dessus on obtient:

$$\begin{aligned} 5(-3 + 5t_0) - 5s + 12(1 + 12t_0) - 60 &= 0 \\ -15 + 25t_0 - 5s + 12 + 144t_0 - 60 &= 0 \\ 169t_0 &= 5s + 63 \\ t_0 &= \frac{5s + 63}{169} \end{aligned}$$

En conséquence, les coordonnées du point P_s sont

$$\begin{aligned} P_s &= \left(-3+5\left(\frac{5s+63}{169}\right), 1+12\left(\frac{5s+63}{169}\right)\right) \\ &= \left(\frac{25s-192}{169}, \frac{60s+925}{169}\right) \end{aligned}$$

Finalement, pour trouver les nombres s tels que $C_sP_s = 4$ (distance entre C_s et P_s) on a deux possibles chemins:

- Comme (C_sP_s) est perpendiculaire à (AB) et $P_s \in (AB)$ alors la distance $\mathrm{d}(C_s, P_s)$ est égale à la distance $\mathrm{d}((AB), C_s)$. Cette deuxième distance est plus facile a calculer. Il suffit de noter que

  $$(AB) : -12x+5y-41 = 0$$

  Par la formule dans le Rappel 5 on trouve que $C_sP_s = 4$ si et seulement si

  $$\begin{aligned} \mathrm{d}((AB), C_s) = \frac{|-12s+25-41|}{\sqrt{144+25}} = 4 &\Leftrightarrow \left(\frac{|12s+16|}{13}\right)^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow (12s+16)^2 = 2704 \\ &\Leftrightarrow 12s+16 = 52 \ \text{ ou } \ 12s+16 = -52 \\ &\Leftrightarrow s = 3 \ \text{ ou } \ s = -\frac{17}{3} \end{aligned}$$

- Une autre façon de raisonner consiste à utiliser la formule de distance entre deux points, qui figure également dans le Rappel 5. Dans ce cas:

  $$\begin{aligned} \mathrm{d}(C_s, P_s) = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_0-s)^2+(y_0-5)^2} = 4 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{25s-192}{169}-s\right)^2+\left(\frac{60s+925}{169}-5\right)^2} = 4 \end{aligned}$$

  On obtient ainsi l'équation:

  $$24336s^2+64896s-413712 = 0$$

  Et donc $s = -\frac{17}{3}$ ou $s = 3$.

Exercice 11.
Soit $[ABC]$ un triangle non aplati.

(11.1) Donner une équation de la hauteur issue de A sur le coté déterminé par B et C. En déduire, en échangeant le rôle des sommets, des équations pour les autres hauteurs.

(11.2) Écrire les équations en supposant $A = (0,0)$.

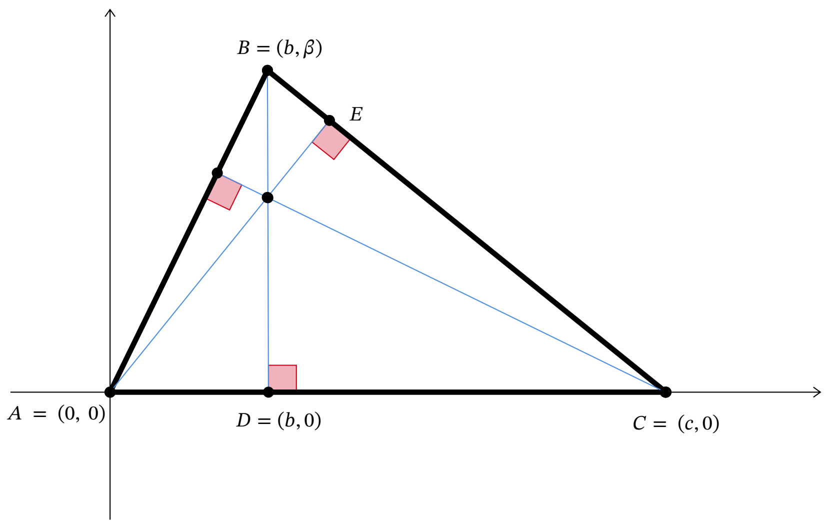
(11.3) Montrer que les hauteurs sont concourantes en H, *l'orthocentre du triangle*.

(11.4) Quels sont les coordonnées de H pour le triangle de sommets $(-1,2)$, $(3,-1)$ et $(1,3)$. (On pourrait utiliser une translation).

Correction.

(11.1)

(11.2) On choisit un systeme de coordonees tel que le sommes du triangle $[ABC]$ deviennent $A = (0, 0)$, $B = (b, \beta)$ et $C = (c, 0)$, où $\beta \neq 0$ car le triangle est non aplati. La hauteur issue de B intersecte la droite (AC) en un point $D = (a, 0)$.



La hauteur issue de A est inclus dans la droite passant par l'origine (c'est à dire A) et de vecteur normal $\overrightarrow{BC} = (b - c, \beta)$. Si E est le point d'intersection avec (BC) alors,

$$(AE) : (b - c)x + \beta y = 0.$$

Par ailleurs, une équation de la droite (BC) est

$$(BC) : \beta cx + (c - b)y - \beta c = 0$$

Les coordonnées du point d'intersection E entre (AE) et (BC) vient donnés par les solutions du système:

$$\begin{cases} (b - c)x + \beta y = 0 \\ \beta cx + (c - b)y - \beta c = 0 \end{cases}$$

D'où

$$E = \left(\frac{\beta^2 c}{(b - c)^2 + \beta^2 c}, \frac{(b - c)\beta c}{(b - c)^2 + \beta^2 c} \right)$$

La hauteur issue de A jusqu'à E est alors donné par la norme du vecteur $\overrightarrow{AE}$ et donc,

$$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{\frac{\beta^2 c^2 \left(\beta^2 + (b - c)^2\right)}{\left((b - c)^2 + \beta^2 c\right)^2}}$$

(11.3) Pour trouver le point H d'intersection entre (BD) et (AE) il suffit de résoudre le système des équations:

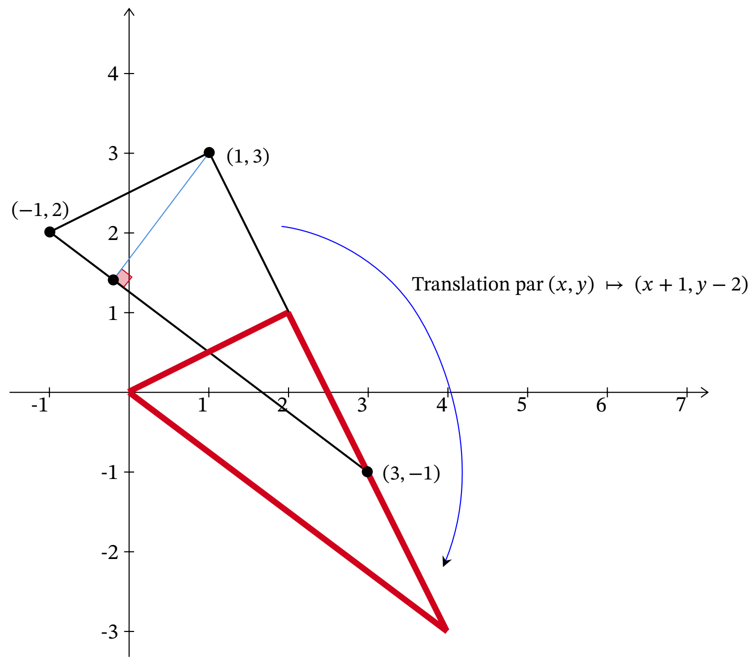
$$\begin{cases} (b - c)x + \beta y = 0 \\ x = b \end{cases}$$

On trouve que le point H est:

$$H = \left(b, -\frac{(b-c)b}{\beta}\right)$$

(11.4) Pour trouver les coordonnées de H on peut faire la translation $(x, y) \longmapsto (x+1, y-2)$. On obtient un nouveau triangle dont les coordonnées des sommets A, B et C sont

$$\begin{aligned} (-1,2) &\longmapsto A = (0,0) \\ (1,3) &\longmapsto B = (2,1) \\ (3,-1) &\longmapsto C = (4,-3) \end{aligned}$$



Si on veut utiliser la formule trouvée dans le exercice précédente il faudra faire une rotation aussi. En revanche le triangle en considération possède un angle de 90° car le vecteur $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} = (2, 1)$ et $\overrightarrow{BC}$ sont perpendiculaires:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = (2)(2) + (1)(-4) = 0$$

Par définition, l'orthocentre du triangle $[ABC]$ est alors le point $H' = B = (2, 1)$. En faisant la translation inverse $(x, y) \longmapsto (x-1, y+2)$ on obtient que l'orthocentre H du triangle donné est

$$H = (1, 3).$$

Exercice 12.

(12.1) Soient $p > 0$, le point $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ et la droite $\mathcal{D} : y = -\frac{p}{2}$. Déterminer le lieu géométrique (une équation) des points P du plan euclidien tels que $d(P, F) = d(P, \mathcal{D})$. Ce lieu est appelée la *parabole de foyer F et de droite directrice $\mathcal{D}$.*

(12.2) Déterminer l'équation de la parabole de foyer $F = (-1, 2)$ et de directrice $\mathcal{D} : 3x - 4y + 1 = 0$.

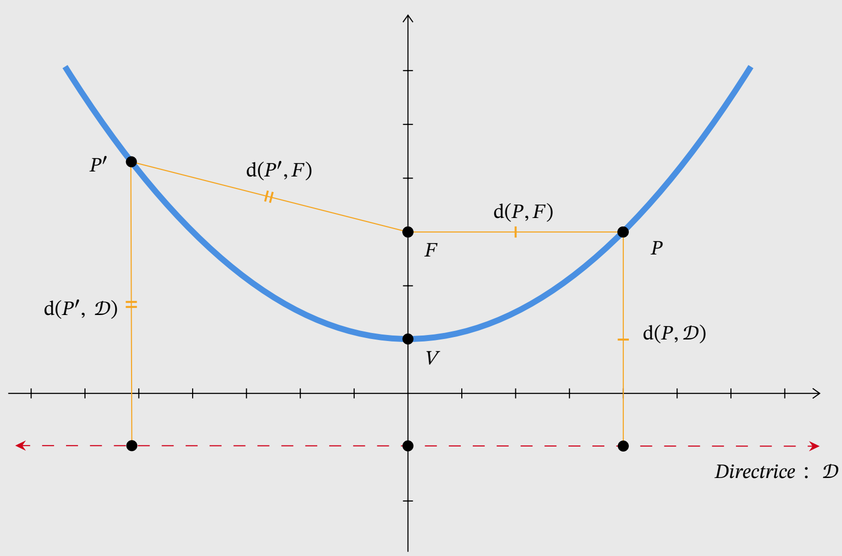
(12.3) Soit $\Gamma : 4x = y^2$ une parabole. Déterminer son foyer et sa droite directrice. Pour un point $P = \left(\frac{a^2}{4}, a\right) \in \Gamma$, déterminer la droite tangente à Γ en P.

Correction.

(1) Soit $P = (x, y)$ un point tel que $\mathrm{d}(P, F) = \mathrm{d}(P, \mathcal{D})$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(P, F) = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} &= \left|y + \frac{p}{2}\right| = \mathrm{d}(P, \mathcal{D}) \\ x^2 + \frac{(2y - p)^2}{4} &= \frac{(2y + p)^2}{4} \\ 8yp &= 4x^2 \\ y &= \frac{1}{2p}x^2 \end{aligned}$$

(2) Soit $\mathcal{P}$ la parabole de foyer $F = (-1, 2)$ de de directrice $\mathcal{D} : 3x - 4y + 1 = 0$.

> **Rappel 6** (Parabole)**.** *Une parabole consiste de l'ensemble des points P tel que la distance du point P jusqu'à un point fixé F (appelée foyer) est égal a la distance entre P et une droite fixée (appelée droite directrice).*
>
> 
>

Par définition on a que $\mathcal{P}$ est

$$\mathcal{P} = \left\{P \in \mathbb{A}^2 \,\middle|\, \mathrm{d}(P, F) = \mathrm{d}(P, \mathcal{D})\right\}.$$

Notons (x, y) les coordonnées du point P. Alors,

$$\mathrm{d}(P, F) = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} = \frac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \mathrm{d}(P, \mathcal{D})$$

Après élever au carré et simplifier on obtient:

$$24xy + 4x(4x + 11) + 9y^2 + 124 = 92y$$

Ou de manière équivalente:

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 44x - 92y + 124 = 0.$$

(3) On peut utiliser la première question mais d'abord il faudra faire un changement de variable. Alors, on pose $X = y$ et $Y = x$ pour obtenir une équation de parabole sous la forme

$$\mathcal{P} : Y = \frac{1}{4}X^2 = \frac{1}{2 \cdot 2}X^2.$$

Par la question (12.1) on se ramène à chercher p tel que $2p = 4$, donc $p = 2$. Le foyer de $\mathcal{P}$ est alors $\left(\frac{p}{2}, 0\right) = (1, 0)$ et la directrice est la droite d'équation $Y = -1$. En faisant le changement de variable dans l'aure sens on trouve que Γ a foyer et directrice décrits par:

$$F = (0, 1)$$
$$\mathcal{D} : x = -1$$

Enfin, la formule classique de la tangente $\mathcal{T}_a$ au graphe de la fonction $f(X) = X^2/4$ permet de trouver:

$$T_a : Y = \frac{a}{2}(X - a) + \frac{a^2}{4}$$

Encore une fois en faisant le changement de variable dans l'autre sens on trouve que l'équation de la droite tangente à Γ en $P = \left(\frac{a^2}{4}, a\right)$ est

$$x - \frac{a}{2}y + \frac{a^2}{4} = 0.$$

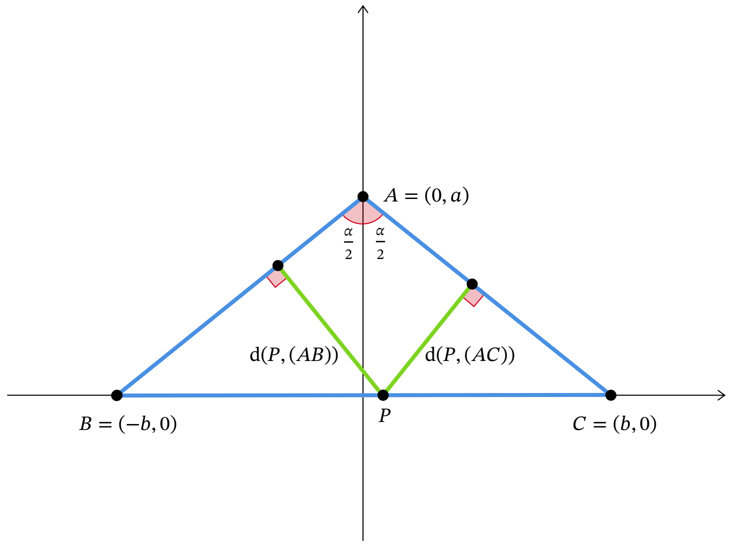
Exercice 13.

(13.1) On considere le triangle isocèle $[ABC]$ avec $z = AB = AC$ et $\alpha \in]0, \pi[$ la mesure de l'angle $\angle BAC$. Pour tout point $P \in [BC]$, calculer la somme des distances de P aux droites (AB) et (AC).

(13.2) Utiliser ce résultat pour déterminer le lieu géométrique des points P tels que $\mathrm{d}(P, \mathcal{D}_1) + \mathrm{d}(P, \mathcal{D}_2) = r$ avec $r > 0$ fixé, où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites fixées. (On distinguera les cas lorsque $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ y sont parallèles ou non).

Correction.

(1) **Première façon :** On commence par choisir un repère adapté. On se place sur le repère tel que $x_A = 0$ et $y_B = y_C = 0$:



Dans cette choix du repère, $b > 0$ est la distance de l'origin à C et donc $-b < 0$ et $a > 0$. Comme le triangle est isocèle et α est la mesure de l'angle $\angle[BAC]$, alors

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{b}{a}$$

En plus,

$$a^2 + b^2 = z^2$$

Soit $P = (p, 0)$ un point sur le segment $[BC]$ joignant les points B et C. La droite (AB) peut être décrit par l'équation paramétrée:

$$(AB) : \begin{cases} x = bt \\ y = a + at \end{cases} \quad , \qquad t \in \mathbb{R}$$

Une équation cartésienne pour (AB) est donc:

$$ax - by + ab = 0$$

De la même façon, la droite (AC) peut être décrit par les équations:

$$(AC) : \begin{cases} x = -bs \\ y = a + as \end{cases} \quad , \qquad s \in \mathbb{R}$$

$$(AC) : ax + by - ab = 0$$

On calcule alors les distances de P au droites (AB) et AC:

$$\mathrm{d}\,(P, (AB)) = \frac{a(p + b)}{z}$$

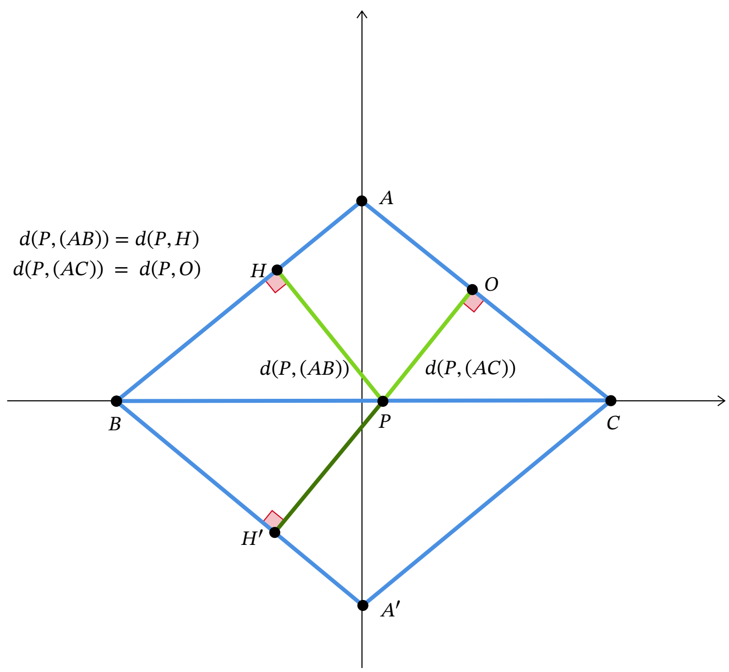
$$\mathrm{d}\,(P, (AC)) = \frac{a(b - p)}{z}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(P,(AB)\right)+\mathrm{d}\left(P,(AC)\right) &= \frac{a(p+b)}{z}+\frac{a(b-p)}{z} \\ &= \frac{a(p+b+b-p)}{z} \\ &= \frac{2ab}{z}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

On remarque que cette quantité ne dépend pas du point P.

Deuxième façon : Considérons A' le point symétrique de A par la droite (BC). Comme le triangle $[ABC]$ est isocèle, le quadrilatère $[ABCA']$ est un parallélogramme. Soit H le point dans la droite (AB) qui vérifie $(PH)\perp(AB)$, donc $\mathrm{d}(P,(AB))=\mathrm{d}(P,H)$. Soit H' le point symétrique à H par rapport à la droite (BC). Alors on a que $(PH')\perp(A'B)$, et donc le point O d'intersection de (PH') et (AC) vérifie $\mathrm{d}(P,(AC))=\mathrm{d}(P,O)$.



Finalement,

$$\mathrm{d}(P,(AB))+\mathrm{d}(P,(AC))=\mathrm{d}(P,H)+\mathrm{d}(P,O)=\mathrm{d}(P,H')+\mathrm{d}(P,O)=\mathrm{d}(H',O).$$

Mais comme (AC) is parallèle to (BA'), cette derniere distance est égale à la hauteur du triangle $[ABC]$ issue de B. Par les formules habituelles (on peut utiliser la Loi de Sinus),

$$\sin(\alpha)=\frac{\mathrm{d}(B,(AC))}{z}$$

d'où

$$\mathrm{d}(B,(AC))=z\sin(\alpha)=z\cdot 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=z\cdot 2\cdot\frac{b}{z}\cdot\frac{a}{z}=\frac{2ab}{z}$$

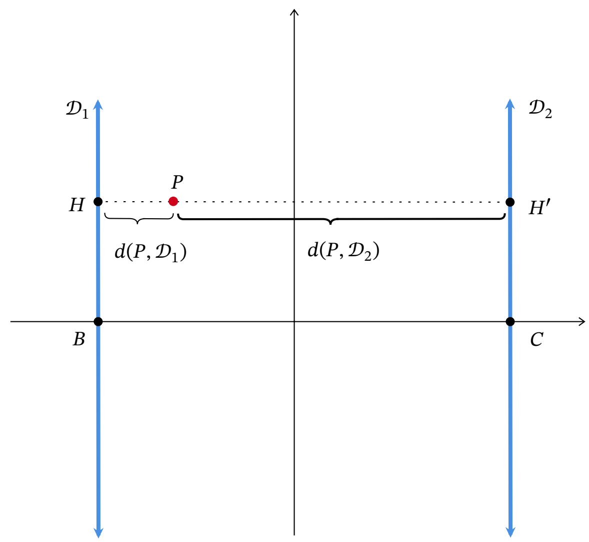
(2) Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites fixées. On va considérer deux cas:

- $\mathcal{D}_1$ est parallèle à $\mathcal{D}_2$: Si $r < \mathrm{d}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ on a

$$r = \mathrm{d}(P, \mathcal{D}_1) + \mathrm{d}(P, \mathcal{D}_2) \geq \mathrm{d}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) > r$$

C'est à dire $r > r$ qui est absurde. Alors dans le cas où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles et $r > 0$ aucun point P vérifie l'égalité cherché.

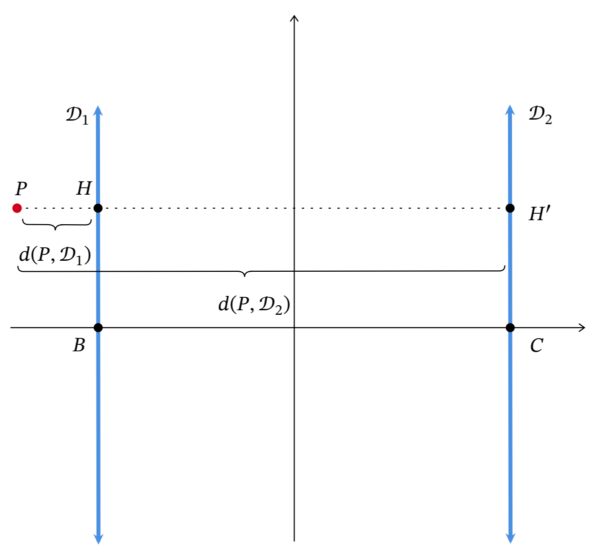
Si $r = 1$, alors $\mathrm{d}(P, \mathcal{D}_1) + \mathrm{d}(P, \mathcal{D}_2) = \mathrm{d}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$. Dans ce cas tout point entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ vérifie l'égalité (voir figure) car si H et H' sont tels que $\mathrm{d}(P, H) = \mathrm{d}(P, \mathcal{D}_1)$ et $\mathrm{d}(P, H') = \mathrm{d}(P, \mathcal{D}_2)$ alors comme les deux droites sont parallèles les points H et H' sont alignés avec P. Finalement $\mathrm{d}(H, H')$ est, par définition, égal à $\mathrm{d}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ mais cette dernière est égal à $\mathrm{d}(P, H) + \mathrm{d}(P, H')$.



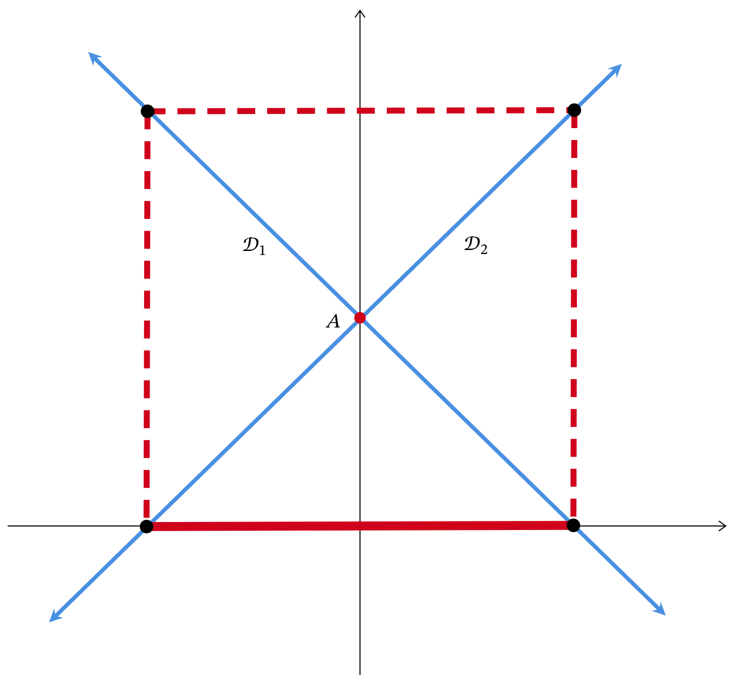
Finalement, si $r > \mathrm{d}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ on a que

$$r = \mathrm{d}(P, \mathcal{D}_1) + \mathrm{d}(P, \mathcal{D}_2) > \mathrm{d}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2).$$

Dans ce cas tout point P qui n'est pas entre les droites satisfait la condition.



- $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles: On se retrouve alors dans une configuration similaire a la première question. On peut noter A le point d'intersection entre les deux droites et on considère un repère de tel sorte que dans chaque portion du plan obtenue par découpage selon les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ on puisse construire le triangle dont les points du segment opposé à A vérifient l'égalité:



On obtient donc quatre segments (que sont les bases de chacun des triangles!). Le lieu géométrique des points P vérifiant

$$r = \mathrm{d}(P, \mathcal{D}_1) + \mathrm{d}(P, \mathcal{D}_2)$$

est donc la réunion de ces quatre segments.

Exercice 14.
Soient O l'origine du repère Oxy et A le point de coordonnées $(2, 0)$. Pour chaque point P appartenant à la droite d'équation $y = 1$, on considere le triangle $[OAP]$. Nous cherchons à savoir pour combien de tels points P le périmètre du triangle $[OAP]$ vaut 5.

(14.1) Faire un dessin pour $P = (1, 1)$ et pour $P = (2, 1)$.

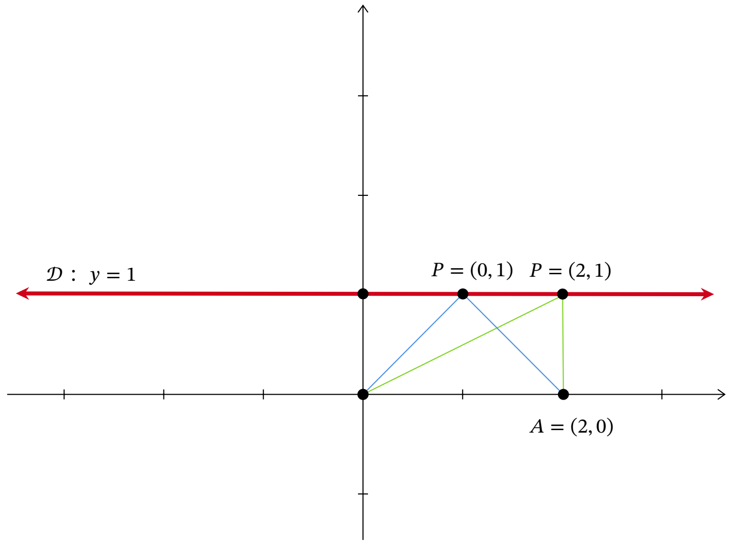
(14.2) Soit $x > 0$. Soit $P = (1 + x, 1)$ et $P' = (1 - x, 1)$. Montrer que les périmètres de $[OAP]$ et de $[OAP']$ sont égaux.

(14.3) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction qui à chaque réel x associé le périmètre du triangle $[OAP]$ avec $P = (x, 1)$. Calculer $f(x)$.

(14.4) Soit $g : x \longmapsto f(x + 1)$. Montrer que g est une fonction paire puis calculer $g(0)$, $g(1)$ et le zéros de g'. Conclure.

Correction.

(1) On commence par le dessin:



(2) Soit $x > 0$ et $P = (1 + x, 1)$ et $P = (1 - x, 1)$. On peut remarquer que les triangles $[OAP]$ et $[OAP']$ sont symétriques par rapport à a la droite $x = 1$ car P et P' (resp., O et A le sont). Ainsi leur périmètres son égaux. Un calcul directe montre aussi que dans le deux cas le périmètre est égal à

$$2 + \sqrt{(1-x)^2 + 1} + \sqrt{(x+1)^2 + 1}.$$

(3) La fonction f associe pour tout x reel la somme des distances $|OP| + |PA| + |OA|$ où $P = (x, 1)$, $A = (2, 0)$ et $O = (0, 0)$. Il est facile a noter que

$$f(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(x-2)^2 + 1}.$$

(4) Soit $g(x) = f(x + 1)$. Donc

$$g(x) = 2 + \sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{(x-1)^2 + 1}$$

un calcul simple montre que $g(x) = g(-x)$ et donc g est une fonction paire. En plus

$$g(0) = 2\sqrt{2} + 2$$
$$g(1) = 3 + \sqrt{5}$$

> **Rappel 7** (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit f continue sur in intervalle $[a, b]$ et N un nombre entre $f(a)$ et $f(b)$ où $f(a) \neq f(b)$. Alors il existe un c in$]a, b[$ tel que $f(c) = N$.*

La fonction g étant dérivable admet une dérivée de la forme:

$$g'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 1}} + \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}}$$

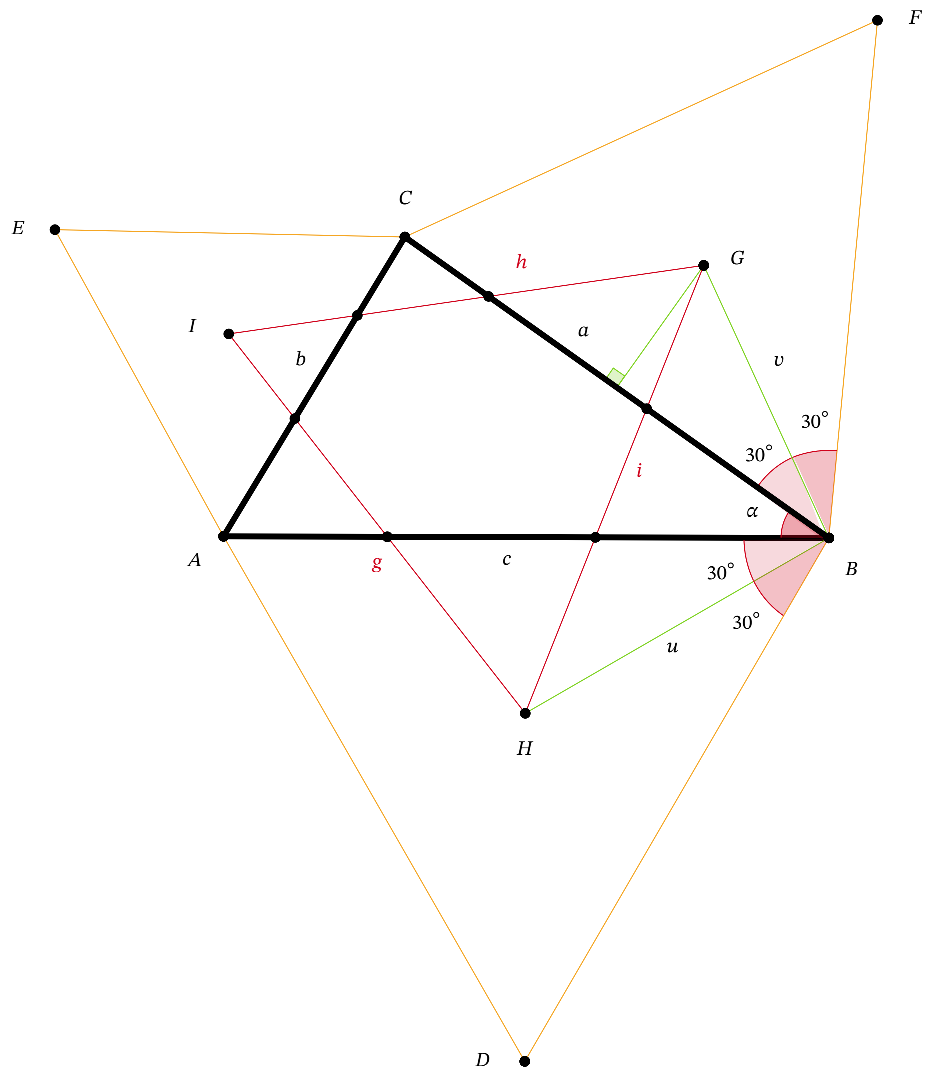
Comme g' est impaire (car g est paire) alors on peut se concentrer sur les valeurs $g'(x)$ pour $x \geq 0$. Si $0 < x < 1$ alors

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(x-1)^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(x+1)^2}}}$$

Comme $(x+1)^2 > (x-1)^2$ alors g' est strictement positive sur $]0,1[$. Si $x > 1$ alors $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$ et donc, $g'(x) > 0$. Comme $g'(1) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ alors on en déduit que g' est strictement positive sur $]0,\infty[$. Par imparité g' est strictement négative sur $]-\infty,0[$. Ainsi le seul zéro de g' est 0. La fonction g est donc strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ et strictement croissante sur $]0,\infty[$. Comme $g(1) = g(-1) = 3 + \sqrt{5} > 5$ alors par le théorème des valeurs intermédiaires (et la stricte monotonie de g) il existent deux c tels que $g(c) = 5$. L'un est strictement positif, l'autre strictement négatif.

Exercice 15.
On considère un triangle $[ABC]$ non aplati. Sur ses côtés on construit, à l'extérieur du triangle, des triangles équilatéraux. Montrer que les centres de ces trois triangles forment un triangle equilatéral.

Correction.
On commence par considérer le triangle $[ABC]$ dans la figure suivante (Attention! pour cette exercice il est fondamental de suivre la correction avec la figure):



On va dénoter l'arête $|AC|$ par la lettre b et de même $a = |CB|$ et $c = |AB|$. La droite (BG) dans le triangle équilatéral $[BCF]$ est bissectrice et alors l'angle $\angle CBF$ vaut $\frac{60°}{2} = 30°$ (car le triangle $[BCF]$ est équilatéral). Le même argument justifie que l'angle $\angle ABH = 30°$. Ensuite, si on dénote par α l'angle entre les segments BA et BC (où les droites passant par ces points) alors l'angle $\angle HBG$ est égal à $\alpha + 60°$. Comme le triangle $[BCF]$ est équilatéral on a que

$$\cos(30°) = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{v}$$

Autrement dit,

$$|BG| = v = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a$$

De la même façon

$$|BH| = u = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot c$$

Par le Théorème du Cosinus sur le triangle $[BHG]$ on trouve que

$$i^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos(\alpha + 60°)$$

Or,

$$\cos(\alpha + 60°) = \cos(\alpha)\cos(60°) - \sin(\alpha)\sin(60°) = \frac{1}{2}\cos(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha).$$

Alors, en remplaçant on obtient

$$\begin{aligned} i^2 &= \frac{c^2 + a^2}{3} - \frac{2ac}{3}\left(\frac{1}{2}\cos(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha)\right) \\ 3i^2 &= c^2 + a^2 - ac\cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha) \end{aligned}$$

De même, le Théorème de Cosinus applique au triangle $[ABC]$ nous donne

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\alpha) \\ ac\cos(\alpha) &= \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) \end{aligned}$$

Finalement, le Théorème du Sinus dans le triangle $[ABC]$ implique que

$$S := \text{Aire}_{[ABC]} = \frac{1}{2}ac\sin(\alpha)$$

Alors,

$$\begin{aligned} 3i^2 &= a^2 + c^2 - \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - b^2\right) + 2\sqrt{3}S \\ 6i^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S \end{aligned}$$

Cette équation est indépendante de l'ordre des cotes a, b et c. Autrement dit, le même analyse sur les sommes A et C du triangle $[ABC]$ montre que

$$\begin{aligned} 6g^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S \\ 6h^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S \end{aligned}$$

On en déduit que $i = g = h$ et le triangle $[IGH]$ est alors équilatéral.