

# Géométrie analytique – 2023-2024

## Feuille d'exercices n° 1

### Équations cartésienne et paramétrique d'une droite

#### Exercice 1.

- 1) Soit  $\mathcal{D}$  la droite définie par l'équation  $2x - y + 6 = 0$ . Déterminer une paramétrisation de  $\mathcal{D}$ .
- 2) Même question pour  $\mathcal{D}_a : 2x - 3ay + 4 = 0$ , où  $a \in \mathbb{R}$ .
- 3) Soit la droite  $\mathcal{D}$  du plan définie par la paramétrisation  $x = 2 - t$  et  $y = -1 + 3t$ , pour  $t \in \mathbb{R}$ . Déterminer une équation cartésienne (ou implicite) de  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 2** (cas particulier du théorème de Desargues). On considère les trois droites  $\mathcal{D}_1 : y = 0$ ,  $\mathcal{D}_2 : x = 0$  et  $\mathcal{D}_3 : -2x + y = 0$  ainsi que les six points  $A_1 = (1, 0)$ ,  $A_2 = (0, 1)$ ,  $A_3 = (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $B_1 = (2, 0)$ ,  $B_2 = (0, 4)$ ,  $B_3 = (t, 2t)$ , où  $t \in \mathbb{R}$ .

- 1) Faire un dessin pour  $t = \frac{3}{2}$ . Justifier que  $B_3 \in \mathcal{D}_3$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
- 2) Déterminer toutes les valeurs de  $t$  pour lesquelles les trois couples de droites

$$(A_1A_2) \text{ et } (B_1B_2), \quad (A_2A_3) \text{ et } (B_2B_3), \quad (A_3A_1) \text{ et } (B_3B_1)$$

s'intersectent en  $C_3$ ,  $C_1$  et  $C_2$  respectivement.

- 3) Quand les points  $C_3$ ,  $C_1$  et  $C_2$  existent, montrer qu'ils sont alignés.
- 4) Que peut-on dire quand les trois points d'intersection n'existent pas tous ?

**Exercice 3.** On considère les points  $P = (-1, 1)$ ,  $B = (2, -1)$  et  $C = (1, 3)$ . Soit  $Q$  le point du plan tel que  $\overrightarrow{BQ} = 3\overrightarrow{QC}$ .

- 1) Après avoir fait un dessin, donner une équation décrivant la droite  $(PQ)$  ; d'abord une équation paramétrée puis une équation cartésienne.
- 2) Déterminer le point  $A$ , point d'intersection de la droite  $(BP)$  et de la droite parallèle à  $(PQ)$  passant par  $C$ .
- 3) Si  $M$  est le point d'intersection de  $(AQ)$  et  $(CP)$ , donner la relation vérifiée par les vecteurs  $\overrightarrow{QM}$  et  $\overrightarrow{MA}$ .

**Exercice 4** (faisceau de droites). Pour tout  $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , on note  $\vec{v}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$

- 1) Soit  $A = (a, b)$  un point du plan affine. Montrer que pour toute droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A$ , il existe  $\theta_{\mathcal{D}} \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  tel que  $\mathcal{D}$  soit décrite par  $(x, y) = (a, b) + t\vec{v}_{\theta_{\mathcal{D}}}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- 2) Soit  $A = (\sqrt{3}, -1)$ . Pour chaque droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A$ , on note, quand ces points existent,  $X_{\mathcal{D}}$  et  $Y_{\mathcal{D}}$  les points d'intersection de  $\mathcal{D}$  avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement. Déterminer toutes les droites passant par  $A$  pour lesquelles  $X_{\mathcal{D}}$  soit strictement entre  $A$  et  $Y_{\mathcal{D}}$ .

**Exercice 5** (déterminant de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ ).

- 1) Soit  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  deux vecteurs dans  $\mathbb{R}^2$ . L'expression  $x_{\vec{v}}y_{\vec{w}} - y_{\vec{v}}x_{\vec{w}}$  appelée le *déterminant des vecteurs*  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  (dans la base canonique) et notée  $\det(\vec{v}, \vec{w})$ . En déduire que

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ colinéaires} \iff \det(\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

- 2) On considère les droites  $\mathcal{D}_1 : (m+1)x + (m^2 - 3m - 10)y - 1 = 0$  et  $\mathcal{D}_2 : 2x - 5y + 6 = 0$ , où  $m \in \mathbb{R}$  est un paramètre. Trouver tous les  $m$  pour lesquels  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont parallèles.

**Exercice 6.** Soient  $\mathcal{D}_1 : (\lambda - 1)x - (2\lambda - 5)y + 3 = 0$  et  $\mathcal{D}_2 : (2\lambda + 3)x + (\lambda + 5)y - 8 = 0$ . Déterminer les valeurs du paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$  telles que

- 1) les droites soient parallèles,
- 2) le vecteur  $\vec{n}_1 = (\lambda - 1, -(2\lambda - 5))$  soit le vecteur directeur de  $\mathcal{D}_2$ . (Cette condition signifie que les droites sont perpendiculaires ; la définition de la perpendicularité utilisera le produit scalaire qui sera vu plus tard en cours.

**Exercice 7.** On considère la parabole  $\Gamma : y = x^2$  (c'est-à-dire le graphe de la fonction  $f(x) = x^2$ ) et le point  $A = (2, -5)$ . Soit  $P_t = (t, t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , un point quelconque de  $\Gamma$ .

- 1) Écrire une équation cartésienne pour  $\mathcal{T}_t$ , la droite tangente à  $\Gamma$  en  $P_t$  et donner le vecteur directeur de cette droite dont la première coordonnée vaut 1.
- 2) Trouver les  $t$  pour lesquels  $(AP_t) = \mathcal{T}_t$ .

## Produit scalaire et distance dans $\mathbb{R}^2$

**Exercice 8.** Soit  $A = (0, 4)$  et soit  $\mathcal{D}$  la droite des abscisses, c'est-à-dire  $\mathcal{D} : y = 0$ . On considère le point  $P_s = (s, 0) \in \mathcal{D}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

- 1) Trouver un point  $Q_s \in \mathcal{D}$  tel que  $(AP_s)$  et  $(AQ_s)$  soient perpendiculaires.
- 2) Calculer la distance  $P_s Q_s$ .
- 3) Pour quel(s)  $s \in \mathbb{R}$  la longueur de l'hypoténuse du triangle  $[AP_s Q_s]$  vaut-elle 10?

**Exercice 9.** Dans le plan affine euclidien  $\mathbb{E}^2$ , on considère les points  $A = (1, 1)$  et  $P_t = (t, t^2)$ , où  $t > 1$  joue le rôle d'un paramètre.

- 1) Calculer  $\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\overrightarrow{AP_t}}{\|\overrightarrow{AP_t}\|}$ . (La limite d'un vecteur est calculée composante par composante.)
- 2) Calculer cette limite en  $\pm\infty$ . Conjecturer la réponse si on remplace  $A$  par un point  $B = (b, b^2)$ .

**Exercice 10.** Soient  $A = (-3, 1)$ ,  $B = (2, 13)$  et  $C_s = (s, 5)$  avec  $s \in \mathbb{R}$ . Pour chaque  $s$  déterminer le point  $P_s \in (AB)$  tel que  $(C_s P_s)$  soit perpendiculaire à  $(AB)$ . Pour quel  $s \in \mathbb{R}$  a-t-on  $C_s P_s = 4$ ?

**Exercice 11.** Soit  $[ABC]$  un triangle non aplati.

- 1) Donner une équation de la hauteur issue de  $A$  sur le côté déterminé par  $B$  et  $C$ . En déduire, en échangeant le rôle des sommets, des équations pour les autres hauteurs.
- 2) Écrire les équations en supposant  $A = (0, 0)$ .
- 3) Montrer que les hauteurs sont concourantes en  $H$ , l'orthocentre du triangle.
- 4) Quels sont les coordonnées de  $H$  pour le triangle de sommets  $(-1, 2)$ ,  $(3, -1)$  et  $(1, 3)$ . (On pourrait utiliser une translation.)

**Exercice 12.**

1) Soient  $p > 0$ , le point  $F = (0, p/2)$  et la droite  $\mathcal{D} : y = -p/2$ . Déterminer le lieu géométrique (une équation) des points  $P$  du plan euclidien tels que  $PF = d(P, \mathcal{D})$ . Ce lieu est appelée la *parabole de foyer  $F$  et de droite directrice  $\mathcal{D}$* .

2) Déterminer l'équation de la parabole de foyer  $F = (-1, 2)$  et de directrice  $\mathcal{D} : 3x - 4y + 1 = 0$ .

3) Soit  $\Gamma : 4x = y^2$  une parabole. Déterminer son foyer et sa droite directrice. Pour un point  $P = (a^2/4, a) \in \Gamma$ , déterminer la droite tangente à  $\Gamma$  en  $P$ .

**Exercice 13.**

1) On considère le triangle isocèle  $[ABC]$  avec  $b = AB = AC$  et  $\alpha \in ]0, \pi[$  la mesure de l'angle  $\hat{A}$ . Pour tout point  $P \in [BC]$ , calculer la somme des distances de  $P$  aux droites  $(AB)$  et  $(AC)$ .

2) Utiliser ce résultat pour déterminer le lieu géométrique des points  $P$  tels que  $d(P, \mathcal{D}_1) + d(P, \mathcal{D}_2) = a$ , avec  $a > 0$  fixé, où  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont deux droites fixées. (On distinguera les cas  $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_1 \not\parallel \mathcal{D}_2$ .)

**Exercice 14.** Soient  $O$  l'origine du repère  $Oxy$  et  $A$  le point de coordonnées  $(2, 0)$ . Pour chaque point  $P$  appartenant à la droite d'équation  $y = 1$ , on considère le triangle  $[OAP]$ . Nous cherchons à savoir pour combien de tels points  $P$  le périmètre du triangle  $[OAP]$  vaut 5.

1) Faire un dessin pour  $P = (1, 1)$  et pour  $P = (2, 1)$ .

2) Soit  $x > 0$ . Soit  $P = (1 + x, 1)$  et  $P' = (1 - x, 1)$ . Montrer que les périmètres de  $[OAP]$  et de  $[OAP']$  sont égaux.

3) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction qui à chaque réel  $x$  associe le périmètre du triangle  $[OAP]$  avec  $P = (x, 1)$ . Calculer  $f(x)$ .

4) Soit  $g : x \mapsto f(x + 1)$ . Montrer que  $g$  est une fonction paire puis calculer  $g(0)$ ,  $g(1)$  et les zéros de  $g'$ . Conclure.

**Exercice 15.** On considère un triangle  $[ABC]$  non aplati. Sur ses côtés on construit, à l'extérieur du triangle, des triangles équilatéraux. Montrer que les centres de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.