

## Géométrie analytique – 2023-2024

### Feuille d'exercices n° 2

#### Aires des triangles dans le plan euclidien

**Exercice 1.** On considère la droite  $\mathcal{D}$  définie par  $\mathcal{D} : x - 3y + 3 = 0$  ainsi que les points  $A$  et  $B$  ayant les coordonnées  $x_A = 3, y_A = 1$  et  $x_B = -9, y_B = -3$ .

- 1) Faire un dessin et calculer l'aire du triangle  $[ABP_0]$  pour  $P_0 = (0, 1)$ .
- 2) Déterminer le nombre de points  $P$  appartenant à la droite  $\mathcal{D}$  tels que l'aire du triangle  $[ABP]$  soit égale à 6.

**Exercice 2.** On considère la droite  $\mathcal{D} : y = -1$  et le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 2. La droite  $\mathcal{D}$  coupe le cercle  $\mathcal{C}$  en deux points  $A = (-\sqrt{3}, -1)$  et  $B = (\sqrt{3}, -1)$ . Pour combien de points  $M$  appartenant au cercle  $\mathcal{C}$  l'aire du triangle  $[ABM]$  vaut-elle  $\sqrt{3}$ ?

**Exercice 3.** Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de rayon 2 centré en  $O = (0, 0)$  et soient les points  $A = (-1, -2)$  et  $B = (5, -4)$ . Déterminer le triangle  $[ABP]$  d'aire maximale quand le point  $P$  parcourt le cercle  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 4.** Soient deux triangles non aplatis  $[PAB]$  et  $[QAB]$  tels que le côté  $[AB]$  soit commun et que  $(PQ)$  et  $(AB)$  s'intersectent. On note  $M$  le point d'intersection de  $(PQ)$  et  $(AB)$ . Après avoir fait un dessin :

- 1) Montrer que  $\frac{\sigma([PAB])}{\sigma([QAB])} = \frac{MP}{MQ}$ .
- 2) Peut-on avoir  $\sigma([PAB]) = \sigma([QAB])$ ?

#### Droites et cercles

**Exercice 5.** Soit  $\mathcal{C}$  le cercle  $x^2 + y^2 = 4$ .

- 1) Déterminer les tangentes à  $\mathcal{C}$  parallèles à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $x - 2y = 6$ .
- 2) Déterminer les tangentes à  $\mathcal{C}$  passant par le point d'intersection de  $\mathcal{D}$  et de  $\mathcal{L} : x + y = -6$ .

**Exercice 6.** Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de rayon  $r > 0$  centré en  $O = (0, 0)$  et soit  $F = (a, b)$  un point tel que  $a^2 + b^2 > r^2$ . Si  $\mathcal{D}$  est une droite passant par  $F$  et qui rencontre le cercle en  $A$  et  $B$  (non nécessairement distincts), montrer que le produit  $FA \cdot FB$  est indépendant de la droite  $\mathcal{D}$ . Ce nombre s'appelle *la puissance du point  $F$  par rapport au cercle  $\mathcal{C}$*  et est noté  $\rho_{\mathcal{C}}(A)$ .

**Exercice 7.** Soient  $\mathcal{C}_1$  le cercle de rayon 1 centré en  $O_1 = (0, 0)$  et  $\mathcal{C}_2$  le cercle de rayon 3 centré en  $O_2 = (5, 0)$ . Soit  $\mathcal{T}$  une tangente commune aux deux cercles ; on suppose que  $O_1$  et  $O_2$  se trouvent dans un même demi-plan déterminé par  $\mathcal{T}$ .

- 1) Faire un dessin.
- 2) Remarquer que les droites  $(O_1O_2)$  et  $\mathcal{T}$  font apparaître deux triangles semblables. Déterminer leur point d'intersection en appliquant le théorème de Thalès.
- 3) Déterminer une équation pour  $\mathcal{T}$ .

#### Exercices supplémentaires

**Exercice 8.**

- 1) Soient les droites  $\mathcal{D}_1 : 13x + 27y = 2018$  et  $\mathcal{D}_2 : 27x + 13y = 8102$ . Déterminer la somme  $x^* + y^*$  où  $(x^*, y^*)$  est le point d'intersection de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .
- 2) Soit  $\Gamma : y = ax^2 + bx$  une parabole qui passe par l'origine. Déterminer  $a$  et  $b$  dans chaque cas.
  - a)  $P = (1, 1)$  et  $Q = (-2, 1)$  appartiennent à  $\Gamma$ .
  - b) La droite  $\mathcal{D} : x = 1$  est l'axe de symétrie de  $\Gamma$  et  $P = (4, -8)$  appartient à  $\Gamma$ .
- 3) Soient  $\mathcal{D}_1 : x - 2y + 4 = 0$  et  $\mathcal{D}_2 : -2x + y + 1 = 0$ . Trouver une équation cartésienne pour la droite passant par le point  $A = (-1, 5)$  et le point d'intersection de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . Donner deux solutions ; la première

en utilisant les coordonnées du point d'intersection et la deuxième en utilisant la famille (le faisceau) des droites engendrée par  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

4) Soient  $\mathcal{D}_1 : x - 2y + 4 = 0$  et  $\mathcal{D}_2 : -2x + y + 1 = 0$  et soit  $f : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$  une fonction bijective telle que  $f((2, 3)) \neq (2, 3)$ . Si  $P$  est un point quelconque de  $\mathcal{D}_1$ , les droites  $(Pf(P))$  peuvent-elles passer par un même point du plan ?

**Exercice 9** (Héron). Soit  $[ABC]$  un triangle. On note  $a = BC$ ,  $b = CA$  et  $c = AB$ . Choisir le système de coordonnées tel que  $A = (0, 0)$  et que le point  $B$  se trouve sur l'axe des abscisses, avec  $x_B > 0$ .

1) Rappeler la formule du cours qui exprime  $\sigma$ , l'aire du triangle, en fonction des coordonnées des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Quelle est la formule faisant apparaître le déterminant ?

2) Déterminer les coordonnées de  $C$  si  $y_C > 0$ , en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

3) En posant  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , démontrer la formule de Héron :  $\sigma^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ .

**Exercice 10.** Soit  $[ABC]$  un triangle isocèle en  $A$ ,  $D$  le milieu de  $[BC]$ ,  $E$  le pied de la perpendiculaire menée de  $D$  à  $(AC)$ ,  $F$  le milieu de  $[DE]$ . Montrer que  $(AF) \perp (BE)$ . On pourra, par exemple, travailler dans un système de coordonnées bien choisi.

**Exercice 11.** Dans le repère  $Oxy$ , nous considérons le cercle trigonométrique  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{O,1}$ , le point  $W = (-1, 0) \in \mathcal{C}$  et la droite  $\mathcal{T}$  tangente à  $\mathcal{C}$  en  $E = (1, 0)$ .

1) Écrire une équation pour  $\mathcal{C}$  et une équation pour  $\mathcal{T}$ .

2) Soit  $A'$  un point quelconque de  $\mathcal{T}$  d'ordonnée notée  $t$ . Écrire une équation pour la droite  $(WA')$ .

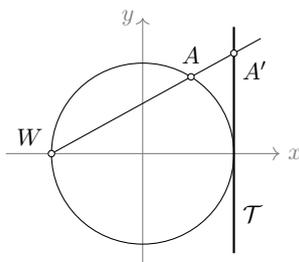
3) Soit  $A$  le deuxième point d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec la droite  $(WA')$  (voir le dessin ci-dessous). En résolvant par substitution (par exemple en exprimant  $y$  en fonction de  $x$ ) le système formé par les équations de  $\mathcal{C}$  et de  $(WA')$ , exprimer les coordonnées de  $A$  en fonction de  $t$ .

4) Nous avons ainsi défini une application  $\psi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$  qui associe à tout point  $A'$  de  $\mathcal{T}$  le point  $A$  du cercle, le deuxième point d'intersection de  $(WA')$  avec le cercle. Quelle est l'image de cette application ?

5) Réciproquement, si  $A = (a, b) \neq W$  est un point du cercle, montrer que l'intersection  $A'$  de  $(WA)$  avec la droite  $\mathcal{T}$  satisfait à  $y_{A'} = \frac{2b}{1+a}$ . L'application  $p : \mathcal{C} \setminus \{W\} \rightarrow \mathcal{T}$  ainsi définie s'appelle la *projection stéréographique du cercle depuis le point W*.

6) Étudier  $\lim_{a \rightarrow -1^+} y_{A'}$ . Interpréter géométriquement.

7) Y a-t-il une relation (géométrique et/ou analytique) entre  $\psi$  et  $p$  ?



**Exercice 12** (\*). En utilisant la construction proposée dans l'exercice précédent, trouver tous les triplets pythagoriciens  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ , c'est-à-dire qui vérifient  $a^2 = b^2 + c^2$ . On pourra remarquer que les coordonnées de  $A$  sont rationnelles si, et seulement si, celles de  $A'$  le sont.