Université de Bretagne Occidentale,
L1 MPI, Mathématiques Générales

TD 1 : Inégalités et Calculs

Exercice 1. Développer les expressions suivantes :

(1) $-7(5a+3b-5)-2(8-a+2b)$

(2) $(3x-2)(5x+1)$

(3) $-4(x+\frac{3}{4})3(x+\frac{2}{3})$

(4) $(2x+1)^2$

(5) $(x-5)(x+5)$

(6) $2(5x-3)^2-10$

(7) $\frac{(x-\sqrt{3})}{5}\frac{(x+\sqrt{3})}{5}$

(8) $(1+3x)^4$

(9) $(1+a+b)^3$

Exercice 2. Factoriser les expressions suivantes :

(1) $(x-2)(x-3)+(x-2)-(4x+5)(x-2)$

(2) $(4x-2)^2-(4x-2)+2x(8x-4)+12x-6$

(3) $x^2-2x+1+2x^2-2$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(1) $\frac{x-1}{2x+\sqrt{3}}=0$

(2) $\frac{(2x+3)^2}{(x-1)(3x-4)}=1$

(3) $\frac{-1}{x+2}<\frac{x}{x-1}$

(4) $x-2=\sqrt{2x-1}$

(5) $x-1\leq\sqrt{x-2}$

Exercice 4. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. On pose : $S=1+x+...+x^n$.

(1) Calculer xS et $S-xS$.

(2) Donner une autre expression de S en fonction de 1 et de x.

(3) En déduire une factorisation de a^n-b^n.

(4) Soient a et b deux réels tels que $|a|\leq 1$ et $|b|\leq 1$.
Montrer que : $|a^n-b^n|\leq n|a-b|$.

Exercice 5. Soient a et b deux réels.

(1) Montrer que $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

(2) Montrer que $||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$.

(3) Dire quand il y a égalités ou inégalités strictes.

(4) Montrer que si $a \leq b$ et $-a \leq b$ alors $|a| \leq b$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **additive** lorsque :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions **continues** qui sont additives. On veut montrer l'égalité ensembliste suivante :

$$\mathcal{F} = \{x \mapsto ax, a \in \mathbb{R}\}. \tag{2}$$

(1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto ax$ est un élément de $\mathcal{F}$.

(2) Soit $f \in \mathcal{F}$.

(a) Déterminer $f(0)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer $f(n) = nf(1)$.

(c) Soit m un entier relatif négatif. Montrer que $f(m) = -f(-m)$. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f(p) = pf(1)$.

(d) Soit $q \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}f(1)$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = xf(1)$.

(e) En déduire que f appartient à $\{x \mapsto ax, a \in \mathbb{R}\}$. Conclure quant à l'égalité (2).

Binôme de Newton

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Démontrer $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. (On rappelle la convention $0! = 1$).

(2) Démontrer $\forall k \in [\![0,n]\!], \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

(3) Démontrer l'égalité permettant la construction systématique du triangle de Pascal :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Exercice 8. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$