

TD 2 : Valeur absolue et logarithme

Exercice 1. (1) Écrire la définition de la valeur absolue et tracer son graphe.

(2) Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = |x - 2|$.

(3) Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = |2x + 1| + 3$.

Exercice 2. Écrire la fonction suivante $f(x) = \frac{|x-3|+x-1}{|x-1|+x-3}$ sans valeur absolue puis tracer son graphe.

Exercice 3. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble E et le représenter :

(1) $E = \{x \in \mathbb{R}, |x - 2| \leq 3\}$

(3) $E = \{x \in \mathbb{R}, |x + 1| < |x - 1|\}$

(2) $E = \{x \in \mathbb{R}, |x + 1| > 3\}$

Exercice 4. Soient x, y, z des réels.

(1) Montrer que $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

(2) Déterminer une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 5. Pour tout $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note :

$$\|X\|_1 = |x| + |y|, \quad \|X\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$

(1) Soient $X = (x_1, y_1)$ et $Y = (x_2, y_2)$ deux éléments de \mathbb{R}^2 . Montrer que

$$\|X + Y\|_1 \leq \|X\|_1 + \|Y\|_1, \quad \|X + Y\|_\infty \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty.$$

(2) On définit $B_1 = \{X \in \mathbb{R}^2, \|X\|_1 \leq 1\}$ et $B_\infty = \{X \in \mathbb{R}^2, \|X\|_\infty \leq 1\}$. Représenter ces deux ensembles dans le plan.

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes :

(1) $\ln(x + 3) + \ln(x + 5) = \ln 15$

(2) $\ln(x - 2) + \ln(x + 2) = \ln 45$

(3) $\ln(x - 3) + \ln(x + 1) = \ln(x^2 + 5)$

$$(4) \begin{cases} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases}$$

Exercice 7

Prouver que $\sqrt{2}$ est irrationnel .

Exercice 8.

(1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$|-3x + 4| + |-5 + x| = 10$$

(2) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante :

$$|2x - 1| \leq |x + 2|$$

Exercice 9.

Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = [x + 1] = \llbracket x + 1 \rrbracket$