Université d'Angers
Département de Mathématiques

Géométrie analytique – 2021-2022

Feuille d'exercices n° 1

Équations cartésienne et paramétrique d'une droite

Exercice 1.

1) Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par l'équation $2x - y + 6 = 0$. Déterminer une paramétrisation de $\mathcal{D}$.

2) Même question pour $\mathcal{D}_a : 2x - 3ay + 4 = 0$, où $a \in \mathbb{R}$.

3) Soit la droite $\mathcal{D}$ du plan définie par la paramétrisation $x = 2 - t$ et $y = -1 + 3t$, pour $t \in \mathbb{R}$. Déterminer une équation cartésienne (ou implicite) de $\mathcal{D}$.

Exercice 2 (cas particulier du théorème de Desargues)**.** On considère les trois droites $\mathcal{D}_1 : y = 0$, $\mathcal{D}_2 : x = 0$ et $\mathcal{D}_3 : -2x + y = 0$ ainsi que les six points $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (0, 1)$, $A_3 = (\frac{1}{2}, 1)$, $B_1 = (2, 0)$, $B_2 = (0, 4)$, $B_3 = (t, 2t)$, où $t \in \mathbb{R}$.

1) Faire un dessin pour $t = \frac{3}{2}$. Justifier que $B_3 \in \mathcal{D}_3$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer toutes les valeurs de t pour lesquelles les trois couples de droites

$$(A_1A_2) \quad \text{et} \quad (B_1B_2), \qquad (A_2A_3) \quad \text{et} \quad (B_2B_3), \qquad (A_3A_1) \quad \text{et} \quad (B_3B_1)$$

s'intersectent en C_3, C_1 et C_2 respectivement.

3) Quand les points C_3, C_1 et C_2 existent, montrer qu'ils sont alignés.

4) Que peut-on dire quand les trois points d'intersection n'existent pas tous ?

Exercice 3. On considère les points $P = (-1, 1)$, $B = (2, -1)$ et $C = (1, 3)$. Soit Q le point du plan tel que $\overrightarrow{BQ} = 3\,\overrightarrow{QC}$.

1) Après avoir fait un dessin, donner une équation décrivant la droite (PQ) ; d'abord une équation paramétrée puis une équation cartésienne.

2) Déterminer le point A, point d'intersection de la droite (BP) et de la droite parallèle à (PQ) passant par C.

3) Si M est le point d'intersection de (AQ) et (CP), donner la relation vérifiée par les vecteurs $\overrightarrow{QM}$ et $\overrightarrow{MA}$.

Exercice 4 (faisceau de droites)**.** Pour tout $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on note $\overrightarrow{v}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$

1) Soit $A = (a, b)$ un point du plan affine. Montrer que pour toute droite $\mathcal{D}$ passant par A, il existe $\theta_{\mathcal{D}} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\mathcal{D}$ soit décrite par $(x, y) = (a, b) + t\overrightarrow{v}_{\theta_{\mathcal{D}}}$, $t \in \mathbb{R}$.

2) Soit $A = (\sqrt{3}, -1)$. Pour chaque droite $\mathcal{D}$ passant par A, on note, quand ces points existent, $X_{\mathcal{D}}$ et $Y_{\mathcal{D}}$ les points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement. Déterminer toutes les droites passant par A pour lesquelles $X_{\mathcal{D}}$ soit strictement entre A et $Y_{\mathcal{D}}$.

Exercice 5 (déterminant de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$)**.**

1) Soit $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$. L'expression $x_{\overrightarrow{v}}y_{\overrightarrow{w}} - y_{\overrightarrow{v}}x_{\overrightarrow{w}}$ appelée le *déterminant des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ (dans la base canonique)* et notée $\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. En déduire que

$$\forall\, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ colinéaires} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0.$$

2) On considère les droites $\mathcal{D}_1 : (m + 1)\,x + (m^2 - 3m - 10)\,y - 1 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : 2\,x - 5\,y + 6 = 0$, où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Trouver tous les m pour lesquels $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles.

Exercice 6. Soient $\mathcal{D}_1 : (\lambda - 1)x - (2\lambda - 5)y + 3 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : (2\lambda + 3)x + (\lambda + 5)y - 8 = 0$. Déterminer les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que

1) les droites soient parallèles,

2) le vecteur $\overrightarrow{n}_1 = (\lambda-1, -(2\lambda-5))$ soit le vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$. (Cette condition signifie que les droites sont perpendiculaires ; la définition de la perpendicularité utilisera le produit scalaire qui sera vu plus tard en cours.) Attention ! Ce point a été modifié.

Exercice 7. On considère la parabole $\Gamma : y = x^2$ (c'est-à-dire le graphe de la fonction $f(x) = x^2$) et le point $A = (2, -5)$. Soit $P_t = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de Γ.

1) Écrire une équation cartésienne pour $\mathcal{T}_t$, la droite tangente à Γ en P_t et donner le vecteur directeur de cette droite dont la première coordonnée vaut 1.

2) Trouver les t pour lesquels $(AP_t) = \mathcal{T}_t$.

Produit scalaire et distance dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 8. Soit $A = (0, 4)$ et soit $\mathcal{D}$ la droite des abscisses, c'est-à-dire $\mathcal{D} : y = 0$. On considère le point $P_s = (s, 0) \in \mathcal{D}$, $s \in \mathbb{R}$.

1) Trouver un point $Q_s \in \mathcal{D}$ tel que (AP_s) et (AQ_s) soient perpendiculaires.

2) Calculer la distance P_sQ_s.

3) Pour quel(s) $s \in \mathbb{R}$ la longueur de l'hypoténuse du triangle $[AP_sQ_s]$ vaut-elle 10 ?

Exercice 9. Dans le plan affine euclidien $\mathbb{E}^2$, on considère les points $A = (1, 1)$ et $P_t = (t, t^2)$, où $t > 1$ joue le rôle d'un paramètre.

1) Calculer $\lim\limits_{t \to 1^+} \overrightarrow{AP_t}/\|\overrightarrow{AP_t}\|$. (La limite d'un vecteur est calculée composante par composante.)

2) Calculer cette limite en $\pm\infty$. Conjecturer la réponse si on remplace A par un point $B = (b, b^2)$.

Exercice 10. Soient $A = (-3, 1)$, $B = (2, 13)$ et $C_s = (s, 5)$ avec $s \in \mathbb{R}$. Pour chaque s déterminer le point $P_s \in (AB)$ tel que (C_sP_s) soit perpendiculaire à (AB). Pour quel $s \in \mathbb{R}$ a-t-on $C_sP_s = 4$?

Exercice 11. Soit $[ABC]$ un triangle non aplati.

1) Donner une équation de la hauteur issue de A sur le côté déterminé par B et C. En déduire, en échangeant le rôle des sommets, des équations pour les autres hauteurs.

2) Écrire les équations en supposant $A = (0, 0)$.

3) Montrer que les hauteurs sont concourantes en H, l'*orthocentre du triangle*.

4) Quels sont les coordonnées de H pour le triangle de sommets $(-1, 2)$, $(3, -1)$ et $(1, 3)$. (On pourrait utiliser une translation.)

Exercice 12.

1) Soient $p > 0$, le point $F = (0, p/2)$ et la droite $\mathcal{D} : y = -p/2$. Déterminer le lieu géométrique (une équation) des points P du plan euclidien tels que $PF = d(P, \mathcal{D})$. Ce lieu est appelée la *parabole de foyer F et de droite directrice $\mathcal{D}$*.

2) Déterminer l'équation de la parabole de foyer $F = (-1, 2)$ et de directrice $\mathcal{D} : 3x - 4y + 1 = 0$.

3) Soit $\Gamma : 4x = y^2$ une parabole. Déterminer son foyer et sa droite directrice. Pour un point $P = (a^2/4, a) \in \Gamma$, déterminer la droite tangente à Γ en P.

Exercice 13.

1) On considère le triangle isocèle $[ABC]$ avec $b = AB = AC$ et $\alpha \in]0, \pi[$ la mesure de l'angle $\widehat{A}$. Pour tout point $P \in [BC]$, calculer la somme des distances de P aux droites (AB) et (AC).

2) Utiliser ce résultat pour déterminer le lieu géométrique des points P tels que $d(P, \mathcal{D}_1) + d(P, \mathcal{D}_2) = a$, avec $a > 0$ fixé, où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites fixées. (On distinguera les cas $\mathcal{D}_1 \nparallel \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$.)

Exercice 14. Soient O l'origine du repère Oxy et A le point de coordonnées $(2, 0)$. Pour chaque point P appartenant à la droite d'équation $y = 1$, on considère le triangle $[OAP]$. Nous cherchons à savoir pour combien de tels points P le périmètre du triangle $[OAP]$ vaut 5.

1) Faire un dessin pour $P = (1, 1)$ et pour $P = (2, 1)$.

2) Soit $x > 0$. Soit $P = (1 + x, 1)$ et $P' = (1 - x, 1)$. Montrer que les périmètres de $[OAP]$ et de $[OAP']$ sont égaux.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction qui à chaque réel x associe le périmètre du triangle $[OAP]$ avec $P = (x, 1)$. Calculer $f(x)$.

4) Soit $g : x \mapsto f(x+1)$. Montrer que g est une fonction paire puis calculer $g(0)$, $g(1)$ et les zéros de g'. Conclure.

Exercice 15. On considère un triangle $[ABC]$ non aplati. Sur ses côtés on construit, à l'extérieur du triangle, des triangles équilatéraux. Montrer que les centres de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.