Université d'Angers
Département de Mathématiques

Géométrie analytique – 2021-2022

Feuille d'exercices n° 2

Aires des triangles dans le plan euclidien

Exercice 1. On considère la droite $\mathcal{D}$ définie par $\mathcal{D} : x - 3\,y + 3 = 0$ ainsi que les points A et B ayant les coordonnées $x_A = 3$, $y_A = 1$ et $x_B = -9$, $y_B = -3$.

1) Faire un dessin et calculer l'aire du triangle $[ABP_0]$ pour $P_0 = (0, 1)$.

2) Déterminer le nombre de points P appartenant à la droite $\mathcal{D}$ tels que l'aire du triangle $[ABP]$ soit égale à 6.

Exercice 2. On considère la droite $\mathcal{D} : y = -1$ et le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2. La droite $\mathcal{D}$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points $A = (-\sqrt{3}, -1)$ et $B = (\sqrt{3}, -1)$. Pour combien de points M appartenant au cercle $\mathcal{C}$ l'aire du triangle $[ABM]$ vaut-elle $\sqrt{3}$?

Exercice 3. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon 2 centré en $O = (0, 0)$ et soient les points $A = (-1, -2)$ et $B = (5, -4)$. Déterminer le triangle $[ABP]$ d'aire maximale quand le point P parcourt le cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 4. Soient deux triangles non aplatis $[PAB]$ et $[QAB]$ tels que le côté $[AB]$ soit commun et que (PQ) et (AB) s'intersectent. On note M le point d'intersection de (PQ) et (AB). Après avoir fait un dessin :

1) Montrer que $\dfrac{\sigma([PAB])}{\sigma([QAB])} = \dfrac{MP}{MQ}$.

2) Peut-on avoir $\sigma([PAB]) = \sigma([QAB])$?

Droites et cercles

Exercice 5. Soit $\mathcal{C}$ le cercle $x^2 + y^2 = 4$.

1) Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x - 2y = 6$.

2) Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{L} : x + y = -6$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon $r > 0$ centré en $O = (0, 0)$ et soit $F = (a, b)$ un point tel que $a^2 + b^2 > r^2$. Si $\mathcal{D}$ est une droite passant par F et qui rencontre le cercle en A et B (non nécessairement distincts), montrer que le produit $FA \cdot FB$ est indépendant de la droite $\mathcal{D}$. Ce nombre s'appelle *la puissance du point F par rapport au cercle $\mathcal{C}$* et est noté $\rho_{\mathcal{C}}(A)$.

Exercice 7. Soient $\mathcal{C}_1$ le cercle de rayon 1 centré en $O_1 = (0, 0)$ et $\mathcal{C}_2$ le cercle de rayon 3 centré en $O_2 = (5, 0)$. Soit $\mathcal{T}$ une tangente commune aux deux cercles ; on suppose que O_1 et O_2 se trouvent dans un même demi-plan déterminé par $\mathcal{T}$.

1) Faire un dessin.

2) Remarquer que les droites (O_1O_2) et $\mathcal{T}$ font apparaître deux triangles semblables. Déterminer leur point d'intersection en appliquant le théorème de Thalès.

3) Déterminer une équation pour $\mathcal{T}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 8.

1) Soient les droites $\mathcal{D}_1 : 13\,x + 27\,y = 2018$ et $\mathcal{D}_2 : 27\,x + 13\,y = 8102$. Déterminer la somme $x^* + y^*$ où (x^*, y^*) est le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

2) Soit $\Gamma : y = a\,x^2 + b\,x$ une parabole qui passe par l'origine. Déterminer a et b dans chaque cas.

a) $P = (1, 1)$ et $Q = (-2, 1)$ appartiennent à Γ.

b) La droite $\mathcal{D} : x = 1$ est l'axe de symétrie de Γ et $P = (4, -8)$ appartient à Γ.

3) Soient $\mathcal{D}_1 : x - 2\,y + 4 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : -2\,x + y + 1 = 0$. Trouver une équation cartésienne pour la droite passant par le point $A = (-1, 5)$ et le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Donner deux solutions ; la première

en utilisant les coordonnées du point d'intersection et la deuxième en utilisant la famille (le faisceau) des droites engendrée par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

4) Soient $\mathcal{D}_1 : x - 2y + 4 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : -2x + y + 1 = 0$ et soit $f : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ une fonction bijective telle que $f((2,3)) \neq (2,3)$. Si P est un point quelconque de $\mathcal{D}_1$, les droites $(Pf(P))$ peuvent-elles passer par un même point du plan ?

Exercice 9 (Héron)**.** Soit $[ABC]$ un triangle. On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. Choisir le système de coordonnées tel que $A = (0,0)$ et que le point B se trouve sur l'axe des abscisses, avec $x_B > 0$.

1) Rappeler la formule du cours qui exprime σ, l'aire du triangle, en fonction des coordonnées des points A, B et C. Quelle est la formule faisant apparaître le déterminant ?

2) Déterminer les coordonnées de C si $y_C > 0$, en fonction de a, b et c.

3) En posant $p = \frac{a+b+c}{2}$, démontrer la formule de Héron : $\sigma^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Exercice 10. Soit $[ABC]$ un triangle isocèle en A, D le milieu de $[BC]$, E le pied de la perpendiculaire menée de D à (AC), F le milieu de $[DE]$. Montrer que $(AF) \perp (BE)$. *On pourra, par exemple, travailler dans un système de coordonnées bien choisi.*

Exercice 11. Dans le repère Oxy, nous considérons le cercle trigonométrique $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{O,1}$, le point $W = (-1,0) \in \mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{T}$ tangente à $\mathcal{C}$ en $E = (1,0)$.

1) Écrire une équation pour $\mathcal{C}$ et une équation pour $\mathcal{T}$.

2) Soit A' un point quelconque de $\mathcal{T}$ d'ordonnée notée t. Écrire une équation pour la droite (WA').

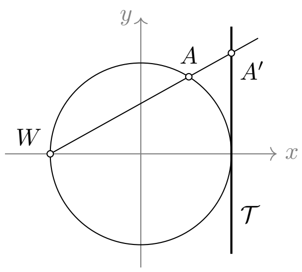
3) Soit A le deuxième point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite (WA') (voir le dessin ci-dessous). En résolvant par substitution (par exemple en exprimant y en fonction de x) le système formé par les équations de $\mathcal{C}$ et de (WA'), exprimer les coordonnées de A en fonction de t.

4) Nous avons ainsi défini une application $\psi : \mathcal{T} \to \mathcal{C}$ qui associe à tout point A' de $\mathcal{T}$ le point A du cercle, le deuxième point d'intersection de (WA') avec le cercle. Quelle est l'image de cette application ?

5) Réciproquement, si $A = (a,b) \neq W$ est un point du cercle, montrer que l'intersection A' de (WA) avec la droite $\mathcal{T}$ satisfait à $y_{A'} = \frac{2b}{1+a}$. L'application $p : \mathcal{C} \setminus \{W\} \to \mathcal{T}$ ainsi définie s'appelle la *projection stéréographique du cercle depuis le point* W.

6) Étudier $\lim\limits_{a \to -1^+} y_{A'}$. Interpréter géométriquement.

7) Y a-t-il une relation (géométrique et/ou analytique) entre ψ et p ?



Exercice 12 (*)**.** En utilisant la construction proposée dans l'exercice précédent, trouver tous les triplets pythagoriciens $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$, c'est-à-dire qui vérifient $a^2 = b^2 + c^2$. *On pourra remarquer que les coordonnées de A sont rationnelles si, et seulement si, celles de A' le sont.*