Université d'Angers – 2023/2024

Fondements d'Analyse

Période 3

Étude locale de fonctions

Exercice 1.
Donner un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(x)$
2. $f_2(x) = 1 - \cos(x)$
3. $f_3(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$
4. $f_4(x) = \tan(3x)$
5. $f_5(x) = \arctan(2x)$

Exercice 2.

1. (a) Donner un équivalent simple en $+\infty$ des fonctions suivantes :

   (i) $f_1(x) = 3x^4 - 2x^2 + \sqrt{x}$ (ii) $f_2(x) = \dfrac{x^2 - 2\sin(x)}{2x^3 - x + 7}$ (iii) $f_3(x) = \dfrac{1 - x\ln(x)}{(x+6)\sqrt{x^2 + \sin(x)}}$

   (iv) $f_4(x) = \sqrt{x^6 - 5x^3 + 1}$ (v) $f_5(x) = \arctan\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

   (b) En déduire la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes.

   (i) $\dfrac{f_5}{f_2}$ (ii) $\dfrac{f_1^3 f_2^6}{f_4^2}$ (iii) $f_1 - f_4$ (iv) $f_3 + f_5$ (v) $f_2 - f_5$

   (c) Peut-on en déduire un équivalent de $4f_2 - f_5$?

2. Donner un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes, puis en déduire leur limite en 0.

   (a) $f_1(x) = 3x^4 - 2x^2 + \sqrt{x}$
   (b) $f_2(x) = \dfrac{(e^x + 1)\sin(x)}{\ln(1+x)}$
   (c) $f_3(x) = x^2 - \arctan(x)$
   (d) $f_4(x) = \dfrac{x - \arctan(x)}{x(1 - \cos(x))}$

Exercice 3.
Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux en justifiant.

1. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
   Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $e^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} e^{g(x)}$.
2. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
   Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(g(x))$.

Exercice 4.
Soit f une fonction réelle admettant un développement limité d'ordre n en 0.

1. Montrer que si f est paire alors la partie régulière du développement limité de f en 0 ne contient que des puissances paires.
2. Montrer que si f est impaire alors la partie régulière du développement limité de f en 0 ne contient que des puissances impaires.

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Donner le développement limité de f en a à l'ordre n pour :

1. $a = 0, n = 1$.
2. $a = 0, n = 2$.
3. $a = 0, n = 3$.
4. $a = 2, n = 3$.

Exercice 6.
1. Donner le développement limité de $f(x) = \ln(1 + x) - \sin(x)$ en 0 à l'ordre 3.
2. Donner le développement limité de $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ en 0 à l'ordre $2n$.
3. Donner le développement limité de $f(x) = \cos(3x)\sin(2x)$ en 0 à l'ordre 5.
4. (a) Donner le développement limité de $f(x) = e^x \cos(x)$ en 0 à l'ordre 3.
   (b) En déduire un équivalent simple en 0 de $g(x) = e^x \cos(x) - 1 - x$.
5. Donner le développement limité de $f(x) = \sqrt{2 + x}$ en 0 à l'ordre 3.
6. Donner le développement limité de $f(x) = \frac{1}{2+x}$ en 0 à l'ordre 3.
7. Donner le développement limité de $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ en 0 à l'ordre 3.
8. (a) Donner le développement limité de $f(x) = e^{\cos(x)}$ en 0 à l'ordre 3.
   (b) En déduire un équivalent simple en 0 de $g(x) = e^{\cos(x)} - e$.
9. Donner le développement limité de $f(x) = \frac{x^5 \sin(x)}{\ln(1+x)}$ en 0 à l'ordre 5.
10. Donner le développement limité de $f(x) = \sin(1 + x)$ en 0 à l'ordre 3.

Pour les questions précédentes, chaque fois que c'est possible, en déduire le signe de la fonction et l'allure de sa courbe représentative au voisinage de 0 (*position par rapport à sa tangente*).

Exercice 7.
Étudier la limite éventuelle de f en a pour :

1. $f(x) = \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2}$ et $a = 0$.
2. $f(x) = \dfrac{1 - x + \ln(x)}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$ et $a = 1$.

Exercice 8.
Calculer les limites suivantes en utilisant des développements limités convenablement choisis :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\frac{x}{x+1}}}{x^2}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3}\right)^x$ où $a, b, c > 0$.

Exercice 9.
En utilisant des développements limités, calculer un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \ln\left(2^x + 3^x - 5^x\right)$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(\arcsin x)^2}$

Exercice 10.
Étudier l'allure de la courbe représentative de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ au voisinage de a pour :

1. $a = 0$.
2. $a = 1$.

Exercice 11.
Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions suivantes au voisinage de l'origine :

$$f(x) = x\sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \arctan(x).$$

Exercice 12.

1. On considère $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.
   (a) Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote commune en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Quelle est la position relative de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote ?

2. On considère $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.
   (a) Montrer que la courbe représentative de g admet des asymptotes en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Quelle est la position relative de la courbe représentative de g par rapport à ces asymptotes ?

3. On considère $h(x) = (x+2)e^{1/x}$.
   (a) Montrer que la courbe représentative de h admet une asymptote en $+\infty$.
   (b) Quelle est la position relative de la courbe représentative de h par rapport à cette asymptote ?

Exercice 13.

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$.
1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer le développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 6.

Exercice 14.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\left(\frac{2}{x^3}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
1. Montrer que f admet un développement limité en 0 à l'ordre 3 dont la partie régulière est nulle.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. Montrer que f' n'admet pas de développement limité en 0.
4. Que peut-on en conclure ?

Courbes paramétrées

Exercice 15.

Déterminer le domaine d'étude le plus petit possible pour les courbes paramétrées suivantes :

1. $\begin{cases} x(t) = t - \frac{3}{2}\sin(t) \\ y(t) = 1 - \frac{3}{2}\cos(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2. $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Pour 2., on pourra considérer la transformation $t \mapsto \frac{1}{t}$.

Exercice 16.

Déterminer les points multiples de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 17.

Trouver les points où la tangente à la courbe suivante est horizontale ou verticale :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}, t \in [-\pi, \pi].$$

Exercice 18.
Déterminer le type de point stationnaire en $t_0 = 0$ pour les courbes paramétrées suivantes :
(*point d'allure ordinaire, point d'inflexion, point de rebroussement de première espèce, point de rebroussement de deuxième espèce*)

1. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t^5 \\ y(t) = t^3 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2t^2 \\ y(t) = t^2 - t^3 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{2}t^3 + 2t^4 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t^2 \ln(1+t) \\ y(t) = t^2 \left(e^{t^2} - 1\right) \end{array}\right.$

Exercice 19.
Étudier les asymptotes de la courbe paramétrée suivante, puis déterminer la position relative de la courbe par rapport à ces asymptotes : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \frac{t}{t-1} \\ y(t) = \frac{3t}{t^2-1} \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Exercice 20.
Étudier puis tracer les courbes paramétrées suivantes :

1. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ (*astroïde*).
2. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ (*cycloïde*).
3. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ (*une courbe de Lissajous*).
4. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^4} \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ (*lemniscate de Bernoulli ; on pourra considérer l'exercice 15*).

Développements limités usuels en 0

- $(1+x)^a = 1 + ax + \dfrac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dfrac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-1))}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \cdots - \dfrac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$
- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$
- $\arcsin(x) = x + \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$
- $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{2\cdot 3} - \dfrac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \cdots - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$
- $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$