Algèbre Lineaire

DS 19 février 2026

Exercice 1 [2 pts]
On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 10i & 3-5i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2i & 6 & -9 \\ 1 & -4i & 7i \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -8 \\ 2+i \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 7i+8 & -1+2i \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices suivantes, lorsque les opérations ont un sens ; lorsqu'elles n'en ont pas, expliquer pourquoi :

$$A+C; \qquad 4A-5D; \qquad A\times B; \qquad B\times A; \qquad A\times C; \qquad C\times A; \qquad C^2$$

$A+C$ n'a pas de sens car la matrice A est de taille 1×2 et C est de taille 2×1.

$$4A-5D = 4\begin{pmatrix} 10i & 3-5i \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 7i+8 & -1+2i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 40i & 12-20i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -35i-40 & 5-10i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 40i-35i-40 & 12-20i+5-10i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5i-40 & 17-30i \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 10i & 3-5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & 6 & -9 \\ 1 & -4i & 7i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -20i^2 + 3 - 5i & 60i - 12i + 20i^2 & -90i + 21i - 35i^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5i + 23 & 48i - 20 & -69i + 35 \end{pmatrix}$$

$B \times A$ n'a pas de sens car le nombre de colonnes de B est 3 mais le nombre de lignes de A est 1.

$$A \times C = \begin{pmatrix} 10i & 3-5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80i + 6 + 3i - 10i - 5i^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -87i + 11 \end{pmatrix}$$

$$C \times A = \begin{pmatrix} -8 \\ 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10i & 3-5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80i & -24 + 40i \\ 20i - 10 & 6 - 10i + 3i - 5i^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -80i & -24 + 40i \\ 20i - 10 & 11 - 7i \end{pmatrix}$$

C^2 : n'a pas de sens car C n'est pas une matrice carré.

Exercice 2 [4 pts]

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice N telle que $A = -I_3 + N$.
2. Montrer que N est une matrice nilpotente, et calculer les puissances successives de N.
3. Montrer que $-I_3$ et N commutent.
4. L'objectif de cette question est de calculer la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$. Pour cela :
   (a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, il existe des réels a_n, b_n, c_n tels que $A^n = a_n I_3 + b_n N + c_n N^2$. Préciser les expressions de ces réels en fonction de n.
   (b) En déduire la matrice A^n en fonction de l'entier naturel n, pour $n \geqslant 2$.
   (c) Que devient cette expression de A^n dans les cas : n pair puis n impair ?

1. On cherche une matrice N telle que $A = -I_3 + N$.
Cela équivaut à

$$N = A + I_3$$

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On va montrer que N est nilpotente, c'est à dire, qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0_{3\times 3}$ où $0_{3\times 3}$ denote la matrice nulle de taille 3×3. En effet :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs,

$$N^3 = N^2 \cdot N$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, N est nilpotente d'ordre 3.

3. <u>1er façon</u>: On note que

$$N \times (-I_3) = N \times ((-1) \cdot I_3)$$

$$= (-1) \cdot (N \times I_3)$$

$$= (-1)(I_3 \times N)$$

$$= (-I_3) \times N$$

(2ème façon) On montre $N \times (-I_3) = (-I_3) \times N$ en faisant le calcul:

$$N \times (-I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(-I_3) \times N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\quad N \times (-I_3) = (-I_3) \times N.$

4. Soit $n \geq 2$. Comme N et $-I_3$ commutent, alors

(a) on peut utiliser la formule du binôme de Newton comme suit :

$$A^n = (N - I_3)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot N^k \cdot (-I_3)^{n-k}$$

$I_3^{n-k} = I_3$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \times ((-1)^{n-k} \cdot I_3)$$

$N^k \times I_3 = N^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \cdot N^k$$

De plus, pour tout $k \geqslant 3$ $N^k = 0_{3\times 3}$, donc :

$$A^n = \binom{n}{0}(-1)^n \cdot N^0 + \binom{n}{1}(-1)^{n-1} N + \binom{n}{2}(-1)^{n-2} \cdot N^2$$

$$= (-1)^n \cdot I_3 + n\cdot(-1)^{n-1} \cdot N + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{n-2} \cdot N^2$$

Ainsi,

$$A^n = a_n I_3 + b_n \cdot N + c_n \cdot N^2$$

avec $a_n = (-1)^n$, $b_n = n\cdot(-1)^{n-1}$ et $c_n = \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}$

(b) En remplaçant dans la formule obtenue dans (a) on a :

$$A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n(-1)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 2\cdot n(-1)^{n-1} & 4n(-1)^{n-2} + 3\cdot(-1)^{n-2}(n)(n-1) \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

(c) Si n est pair alors $(-1)^n = 1$, $(-1)^{n-1} = -1$ et $(-1)^{n-2} = 1$, donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2n & 3n^2+n \\ 0 & 1 & -3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si n est impair, alors $(-1)^n = -1$, $(-1)^{n-1} = 1$ et $(-1)^{n-2} = -1$, donc

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 2n & -3n^2-n \\ 0 & -1 & 3n \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 [3 pts]
On considère le système d'équations suivant :

$$(SE_1)\left\{\begin{array}{rrrrcr} 2x & +3y & +2z & +t & = & 7 \\ 4x & +5y & +3z & +5t & = & 5 \\ -2x & -6y & -z & +6t & = & -16 \\ 8x & +10y & +2z & +17t & = & -13 \end{array}\right.$$

1. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Préciser les matrices A et B telles que $(SE_1) \iff AX = B$.

   Dans la suite, on représentera (SE_1) par $[A \mid B]$

2. Résoudre le système (SE_1) par la méthode du "pivot de Gauss" ou "d'échelonnage ", càd en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes (uniquement) à partir de l'écriture matricielle $[A \mid B]$ pour échelonner la matrice A.
   Conclure en précisant l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions du système.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ -2 & -6 & -1 & 6 \\ 8 & 10 & 2 & 17 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et

$B = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -16 \\ -13 \end{pmatrix}$. On note que

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ -2 & -6 & -1 & 6 \\ 8 & 10 & 2 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -16 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 3y + 2z + t = 7 \\ 4x + 5y + 3z + 5t = 5 \\ -2x - 6y - z + 6t = -16 \\ 8x + 10y + 2z + 17t = -13 \end{cases}$$

$$\iff (SE_1).$$

2. On va résoudre (SE_1) par pivot de Gauss :

$$[A \mid B] = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ -2 & -6 & -1 & 6 & -16 \\ 8 & 10 & 2 & 17 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & 13 & -41 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & -23 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow \frac{1}{5} L_4]{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

On obtient ainsi un système équivalente à (SE_1) :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z + t = 7 \\ \quad -y - z + 3t = -9 \\ \quad\quad 2z - t = 9 \\ \quad\quad\quad t = -1 \end{cases}$$

Donc $t = -1$,

$$2z - (-1) = 9 \Rightarrow 2z + 1 = 9$$
$$\Rightarrow 2z = 8$$
$$\Rightarrow z = 4$$

et

$$-y - (4) + 3(-1) = -9 \Rightarrow -y - 7 = -9$$
$$\Rightarrow y = 9 - 7$$
$$\Rightarrow y = 2$$

et

$$2x + 3y + 2z + t = 7 \iff 2x + 3(2) + 2(4) + (-1) = 7$$
$$\Rightarrow 2x + 6 + 8 - 1 = 7$$
$$\Rightarrow 2x + 13 = 7$$
$$\Rightarrow 2x = -6$$
$$\Rightarrow x = -3$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de SE_1 est donné par

$$\mathcal{S}_1 = \{(-3, 2, 4, -1)\}.$$

Exercice 4 [3 pts]
On considère le système d'équations suivant :

$$(SE_2)\begin{cases} x & -ay & +a^2z & = & a \\ ax & -a^2y & +az & = & 1 \\ ax & +y & -a^3z & = & 1 \end{cases}$$

Résoudre le système (SE_2) par la méthode du "pivot de Gauss" ou "d'échelonnage " et discuter les différents cas possibles suivant les valeurs du paramètre a. Conclure chaque cas en précisant l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions du système.

On commence par écrire la matrice augmentée de (SE_2) et on va trouver une forme échelonnée. On va supposer d'abord que $a \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & a^2 & a \\ a & -a^2 & a & 1 \\ a & 1 & -a^3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - aL_1]{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & a^2 & a \\ 0 & 0 & -a^3+a & -a^2+1 \\ 0 & a^2+1 & -2a^3 & -a^2+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & a^2 & a \\ 0 & a^2+1 & -2a^3 & -a^2+1 \\ 0 & 0 & -a^3+a & -a^2+1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)\cdot L_3]{(-1)\cdot L_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & a^2 & a \\ 0 & -a^2-1 & 2a^3 & a^2-1 \\ 0 & 0 & a^3-a & a^2-1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & a^2 & a \\ 0 & -a^2-1 & 2a^3 & (a-1)(a+1) \\ 0 & 0 & a(a-1)(a+1) & (a-1)(a+1) \end{array}\right) \quad (\star)$$

On va discuter les solutions du système en suivant les valeurs de a :

(i) Si $a=0$: Dans ce cas le système (SE_2) devient :

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad S_2 = \emptyset$$

car on a une équation impossible.

(ii) **Si $a = 1$** : La matrice ($\star$) devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et on a donc un système équivalent :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \quad -2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $2y = 2z \iff y = z$ et

$$x = 1 + y - z$$
$$x = 1 + z - z$$
$$x = 1$$

On obtient donc $S_2 = \{ (1, z, z) \ / \ z \in \mathbb{R} \}$.

(iii) **Si $a = -1$** : La matrice ($\star$) devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et on a donc un système équivalent :

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ \quad -2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $2y = -2z \Leftrightarrow y = -z$ et

$$x + y + z = -1 \Rightarrow x - z + z = -1$$
$$\Leftrightarrow x = -1$$

On obtient donc $S_2 = \{(-1, -z, z) \,/\, z \in \mathbb{R}\}$.

(iv) <u>Si $a \neq 0, 1, -1$</u>, alors $(\star)$ nous donne un système équivalent :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & a^2 & a \\ 0 & -a^2-1 & 2a^3 & (a-1)(a+1) \\ 0 & 0 & a(a-1)(a+1) & (a-1)(a+1) \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - ay + a^2 z = a \\ (-a^2-1)y + 2a^3 z = (a-1)(a+1) \\ a(a-1)(a+1)\, z = (a-1)(a+1) \end{cases}$$

Donc,

$$z = \frac{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+1)}}{a\cancel{(a-1)}\cancel{(a+1)}} \qquad (a \neq 0, 1, -1)$$

$$z = \frac{1}{a}$$

En remplaçant :

$$(-a^2-1)\cdot y + 2a^{\cancel{3}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{a}}\right) = (a-1)(a+1)$$

$$\Rightarrow (-a^2-1)\, y = a^2 - 1 - 2a^2$$

$$\Rightarrow (-a^2-1)\, y = -a^2 - 1$$

$$\Rightarrow y = 1$$

et

$$x - ay + a^2 \cdot z = a$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x - a(1) + a^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{\cancel{a}}\right) = a$$

$$\Rightarrow \quad x - a + a = a$$

$$\Rightarrow \quad x = a$$

Ainsi $\quad S_1 = \left\{ \left(a, 1, \frac{1}{a}\right) \right\}$.

En resumé :

$$S_1 = \begin{cases} \left(a, 1, \frac{1}{a}\right) & \text{si } a \neq 0, 1, -1 \\ \emptyset & \text{si } a = 0 \\ \{(1, z, z) / z \in \mathbb{R}\} & \text{si } a = 1 \\ \{(-1, -z, z) / z \in \mathbb{R}\} & \text{si } a = -1 \end{cases}$$

__Exercice__ **5** [3 pts]
Dans chacun des cas suivants, le sous-ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E ? Justifier la réponse.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x = y \times z\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ 2x + 5y - 9z = 0\}$.
3. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(\pi - x)\}$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in E \mid \ P(0) = 5\}$.

Le barème inscrit est indicatif et non définitif

1. F n'est pas un sous-espace car il n'est pas stable par produit scalaire; par exemple on peut considérer $\lambda = 2$ et $\vec{u} = (2,1,2)$. Il est clair que $\vec{u} \in F$ car $2 = 1 \times 2$, cependant

$$\lambda \cdot \vec{u} = 2 \cdot (2,1,2) = (4,2,4) \notin F$$

car $4 \neq 2 \times 4 = 8$.

2. On va montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 5y - 9z = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

(i) On note que $F \neq \emptyset$ car $(0,0,0) \in F$ puisque $2(0) + 5(0) - 9(0) = 0$.

(ii) <u>Stabilité par addition</u>: Soient $\vec{u} = (x,y,z)$ et $\vec{v} = (x',y',z')$ dans F, c.à.d, $2x + 5y - 9z = 0$ et $2x' + 5y' - 9z' = 0$. On note que

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y', z + z')$$

et

$$\begin{aligned} 2(x+x') + 5(y+y') - 9(z+z') &= 2x + 2x' + 5y + 5y' - 9z - 9z' \\ &= \underbrace{2x + 5y - 9z} + \underbrace{2x' + 5y' - 9z'} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\vec{u}+\vec{v} \in F$.

(iii) <u>Stabilité par produit scalaire :</u> Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}=(x,y,z) \in F$.

Notons que

$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

et

$$\begin{aligned} 2(\lambda x) + 5(\lambda y) - 9(\lambda z) &= \lambda(2x+5y-9z) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\vec{u} \in F$

Ainsi, $\lambda \cdot \vec{u} \in F$.

On en deduit que $F \neq \emptyset$ et stable par $+_{\mathbb{R}^3}$ et $\cdot_{\mathbb{R}^3}$ et donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. Considerons $F = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = f(\pi - x) \}$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda \cdot f(x) + \mu g(x) \\ &= \lambda \cdot f(\pi - x) + \mu g(\pi - x) \\ &= (\lambda \cdot f + \mu g)(\pi - x) \end{aligned}$$

On en deduit que $\lambda \cdot f + \mu \cdot g \in F$. De plus $0 \in F$ car $\forall x \in \mathbb{R}$

$$0 = 0(x) = 0(\pi - x) = 0.$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

☞ À noter qu'on a utilisé une autre "méthode" qui est quand même équivalente au critère utilisé dans 2. ⇲

4. $F = \{ P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(0) = 5 \}$ n'est pas un sous-espace de $E = \mathbb{R}[X]$ car il n'est pas stable par addition. En effet, considerons

$$P = 5$$

le polynôme constante. Il est clair que $P(0) = 5$ et donc $P \in F$. Cependant :

$$\begin{aligned}(P+P)(0) &= P(0) + P(0) \\ &= 5 + 5 \\ &= 10\end{aligned}$$

Ainsi, $P + P \notin F$.