L1 MI - Semestre 2
ALGÈBRE LINÉAIRE

***Devoir Surveillé* du 19 Février 2026** - *(durée : 2 h 30)*

Les documents sont interdits, ainsi que les téléphones, montres connectées et autres appareils électroniques, mais les calculatrices non graphiques et de type "collège" sont autorisées.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies :
justifiez vos affirmations, détaillez vos raisonnements et rédigez proprement.

Questions de cours [5 pts] $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Énoncer la définition d'une matrice carrée triangulaire inférieure : on notera la matrice $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
2. Donner la définition (complète) d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, en explicitant (traduisant) chacun des axiomes.
3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni des opérations notées $+$ et $\cdot$
   Le vecteur nul de E sera noté 0_E ou $\vec{0}$.
   Démontrer les propriétés suivantes :
   (a) L'addition $+$ dans E est simplifiable, càd : $\forall\, \vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z} \in E, \quad \vec{x}+\vec{z} = \vec{y}+\vec{z} \Longrightarrow \vec{x} = \vec{y}$.
   (b) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\, \lambda \cdot_E 0_E = 0_E$. Autrement noté, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\, \lambda \cdot_E \vec{0} = \vec{0}$.
4. Soit $(E,\, +,\, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
   Démontrer la proposition suivante :
   Une famille d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
5. Soit $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ une famille finie de vecteurs de E.
   Énoncer une caractérisation (càd une équivalence) de : " $\mathcal{F}$ est liée dans E".
6. Que signifie pour une famille $(\vec{v_i})_{i\in I}$ libre dans E d'être maximale ?
7. Démontrer la proposition suivante :
   Soit $(E,\, +,\, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de type fini et de dimension $n \geqslant 1$.
   Alors toute famille génératrice de E dont le nombre d'éléments est égal à la dimension de E est une base de E.
8. Énoncer le théorème "de la base incomplète".

Exercice 1 [2 pts]
On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 10i & 3-5i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2i & 6 & -9 \\ 1 & -4i & 7i \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -8 \\ 2+i \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 7i+8 & -1+2i \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices suivantes, lorsque les opérations ont un sens ; lorsqu'elles n'en ont pas, expliquer pourquoi :

$$A + C; \qquad 4A - 5D; \qquad A \times B; \qquad B \times A; \qquad A \times C; \qquad C \times A; \qquad C^2$$

Exercice 2 [4 pts]

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice N telle que $A = -I_3 + N$.
2. Montrer que N est une matrice nilpotente, et calculer les puissances successives de N.
3. Montrer que $-I_3$ et N commutent.
4. L'objectif de cette question est de calculer la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$. Pour cela :
   (a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, il existe des réels a_n, b_n, c_n tels que $A^n = a_n I_3 + b_n N + c_n N^2$. Préciser les expressions de ces réels en fonction de n.
   (b) En déduire la matrice A^n en fonction de l'entier naturel n, pour $n \geqslant 2$.
   (c) Que devient cette expression de A^n dans les cas : n pair puis n impair ?

Exercice 3 [3 pts]

On considère le système d'équations suivant :

$$(SE_1)\left\{\begin{array}{rrrrcr} 2x & +3y & +2z & +t & = & 7 \\ 4x & +5y & +3z & +5t & = & 5 \\ -2x & -6y & -z & +6t & = & -16 \\ 8x & +10y & +2z & +17t & = & -13 \end{array}\right.$$

1. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Préciser les matrices A et B telles que $(SE_1) \Longleftrightarrow AX = B$.
   Dans la suite, on représentera (SE_1) par $[A \mid B]$
2. Résoudre le système (SE_1) par la méthode du "pivot de Gauss" ou "d'échelonnage ", càd en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes (uniquement) à partir de l'écriture matricielle $[A \mid B]$ pour échelonner la matrice A.
   Conclure en précisant l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions du système.

Exercice 4 [3 pts]

On considère le système d'équations suivant :

$$(SE_2)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -ay & +a^2z & = & a \\ ax & -a^2y & +az & = & 1 \\ ax & +y & -a^3z & = & 1 \end{array}\right.$$

Résoudre le système (SE_2) par la méthode du "pivot de Gauss" ou "d'échelonnage " et discuter les différents cas possibles suivant les valeurs du paramètre a. Conclure chaque cas en précisant l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions du système.

Exercice 5 [3 pts]

Dans chacun des cas suivants, le sous-ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E ? Justifier la réponse.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x = y \times z\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ 2x + 5y - 9z = 0\}$.
3. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(\pi - x)\}$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in E \mid \ P(0) = 5\}$.

Le barème inscrit est indicatif et non définitif