Université d'Artois — **2026–2027**
Faculté des Sciences Jean Perrin — **Licence 3 de Mathématiques**
Enseignant : Santiago Toro Oquendo — Semestre 1

Équations différentielles et optimisation

Corrigé du devoir surveillé

Mardi 3 novembre 2026 — Durée : 2 heures

Exercice 1 (Équations du premier ordre) — 4 points

1. On considère l'équation différentielle $x^3\,y' - y = 0$.

a) Résoudre cette équation sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.

b) Montrer qu'elle admet une infinité de solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et vérifiant $y(0) = 0$. Cela contredit-il le théorème de Cauchy–Lipschitz ?

Indication : on pourra étudier la fonction égale à $\mathrm{e}^{-1/(2x^2)}$ *pour* $x \neq 0$ *et à* 0 *en* $x = 0$.

2. On considère l'équation différentielle

$$\left(y\mathrm{e}^{xy}\cos 2x - 2\mathrm{e}^{xy}\sin 2x + 2x\right)\mathrm{d}x + \left(x\mathrm{e}^{xy}\cos 2x - 3\right)\mathrm{d}y = 0.$$

a) Montrer que cette équation est exacte.

b) En donner les solutions sous forme implicite.

Solution.

1. a) Soit $\mathrm{I} =]0,+\infty[$ ou $\mathrm{I} =]-\infty,0[$. Sur I, on a $x^3 \neq 0$, et l'équation s'écrit $y' = \dfrac{y}{x^3}$; on sépare les variables.

La fonction nulle est solution. De plus, $f(x,y) = y/x^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{I}\times\mathbb{R}$: d'après le théorème de Cauchy–Lipschitz, une solution qui s'annule en un point de I coïncide avec la solution nulle. Soit donc y une solution sur I qui ne s'annule pas ; elle garde un signe constant (théorème des valeurs intermédiaires), et

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x^3}, \qquad x \in \mathrm{I}.$$

Comme $x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ sur I, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln|y(x)| = -\frac{1}{2x^2} + c, \quad \text{soit} \quad |y(x)| = \mathrm{e}^{c}\,\mathrm{e}^{-1/(2x^2)}, \qquad x \in \mathrm{I}.$$

Puisque y garde un signe constant, $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-1/(2x^2)}$ avec $\mathrm{C} = \pm\mathrm{e}^{c} \in \mathbb{R}^*$. En y ajoutant la solution nulle ($\mathrm{C} = 0$), les solutions sur I sont

$$y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-1/(2x^2)}, \qquad \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

b) On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(2x^2)} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Il est clair que $\varphi(0) = 0$. Vérifions que cette fonction est continue : elle l'est sur $\mathbb{R}^*$, comme composée de fonctions continues, et pour la continuité en 0, on calcule la limite de φ en 0 à gauche et à droite.

Limite à gauche. Quand $x \to 0^-$, on a $x^2 \to 0^+$, donc $-\dfrac{1}{2x^2} \to -\infty$, et par composition avec l'exponentielle,

$$\lim_{x\to 0^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-1/(2x^2)} = 0.$$

Limite à droite. De même, quand $x \to 0^+$, on a $x^2 \to 0^+$, donc $-\dfrac{1}{2x^2} \to -\infty$, et

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-1/(2x^2)} = 0.$$

Les limites à gauche et à droite en 0 sont égales à $\varphi(0) = 0$: φ est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

D'après la question précédente (avec $C = 1$), φ vérifie clairement l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Il reste donc à vérifier que φ est dérivable en 0 ; pour cela, on calcule la limite de son taux d'accroissement en 0. Pour $x \neq 0$,

$$\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}\right| = \frac{1}{|x|}\,\mathrm{e}^{-1/(2x^2)} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2x^2}}\,\mathrm{e}^{-1/(2x^2)}.$$

Quand $x \to 0$, on a $\dfrac{1}{2x^2} \to +\infty$; or, par croissances comparées, $\sqrt{X}\,\mathrm{e}^{-X} \to 0$ quand $X \to +\infty$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = 0 :$$

φ est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = 0$. L'équation est alors aussi vérifiée en $x = 0$, puisque $0^3 \cdot \varphi'(0) - \varphi(0) = 0$. Ainsi φ est une solution sur $\mathbb{R}$ tout entier, avec $\varphi(0) = 0$.

Enfin, l'équation étant linéaire, $C\varphi$ est encore une solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 0$, pour tout $C \in \mathbb{R}$: on obtient ainsi une infinité de solutions définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $y(0) = 0$. (Plus généralement, pour tout $(C_-, C_+) \in \mathbb{R}^2$, la fonction valant $C_-\varphi$ sur $]-\infty, 0]$ et $C_+\varphi$ sur $[0, +\infty[$ convient, par le même raisonnement.)

Cela ne contredit pas le théorème de Cauchy–Lipschitz : celui-ci porte sur une équation sous forme résolue $y' = f(x, y)$, et le coefficient x^3 de y' s'annule en $x = 0$. Sous forme résolue, $f(x, y) = y/x^3$ n'est pas définie en $x = 0$. D'ailleurs, en faisant $x = 0$ dans l'équation, on voit que toute solution définie sur un intervalle contenant 0 vérifie $y(0) = 0$: le problème de Cauchy $y(0) = y_0$ n'a aucune solution si $y_0 \neq 0$, et une infinité si $y_0 = 0$.

2. On note $M(x, y) = ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + 2x$ et $N(x, y) = xe^{xy} \cos 2x - 3$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, de sorte que l'équation s'écrit $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$.

a) Il s'agit de vérifier que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Dérivée de M *par rapport à* y, x étant fixé. La dérivée de $y \mapsto \mathrm{e}^{xy}$ est $y \mapsto x\,\mathrm{e}^{xy}$; par la formule de dérivation d'un produit, celle de $y \mapsto y\,\mathrm{e}^{xy}$ est donc $y \mapsto \mathrm{e}^{xy} + xy\,\mathrm{e}^{xy} = (1 + xy)\,\mathrm{e}^{xy}$. Les facteurs $\cos 2x$ et $\sin 2x$ sont constants, et le terme $2x$ ne dépend pas de y. Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) &= \left(\mathrm{e}^{xy} + xy\,\mathrm{e}^{xy}\right)\cos 2x - 2x\,\mathrm{e}^{xy} \sin 2x + 0\\ &= (1 + xy)\,\mathrm{e}^{xy} \cos 2x - 2x\,\mathrm{e}^{xy} \sin 2x.\end{aligned}$$

Dérivée de N *par rapport à* x, y étant fixé. Le terme $x\,\mathrm{e}^{xy} \cos 2x$ est le produit des trois fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \mathrm{e}^{xy}$ et $x \mapsto \cos 2x$, de dérivées respectives 1, $y\,\mathrm{e}^{xy}$ et $-2 \sin 2x$; la constante -3 a une dérivée nulle. Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) &= 1 \cdot \mathrm{e}^{xy} \cos 2x + x \cdot y\,\mathrm{e}^{xy} \cos 2x + x\,\mathrm{e}^{xy} \cdot (-2 \sin 2x) - 0\\ &= (1 + xy)\,\mathrm{e}^{xy} \cos 2x - 2x\,\mathrm{e}^{xy} \sin 2x.\end{aligned}$$

On a donc $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$: l'équation est bien exacte.

b) On cherche F telle que $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Il est plus simple d'intégrer N par rapport à y, x étant fixé. Comme $\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) = x\,e^{xy}$, on obtient

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int (x\,e^{xy}\cos 2x - 3)\,dy \\ &= \cos 2x \int x\,e^{xy}\,dy - \int 3\,dy \\ &= e^{xy}\cos 2x - 3y + g(x), \end{aligned}$$

où la « constante » d'intégration g ne dépend que de x. On dérive alors cette expression par rapport à x, y étant fixé, en utilisant $\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) = y\,e^{xy}$ et $(\cos 2x)' = -2\sin 2x$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= y\,e^{xy}\cos 2x + e^{xy}\cdot(-2\sin 2x) - 0 + g'(x) \\ &= y\,e^{xy}\cos 2x - 2\,e^{xy}\sin 2x + g'(x). \end{aligned}$$

La condition $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ s'écrit donc

$$y\,e^{xy}\cos 2x - 2\,e^{xy}\sin 2x + g'(x) = y\,e^{xy}\cos 2x - 2\,e^{xy}\sin 2x + 2x,$$

et, après simplification des termes contenant e^{xy}, il reste $g'(x) = 2x$. On peut donc prendre $g(x) = x^2$, d'où

$$F(x,y) = e^{xy}\cos 2x - 3y + x^2.$$

Les solutions de l'équation sont les fonctions y telles que $x \mapsto F\big(x, y(x)\big)$ soit constante : elles sont données sous forme implicite par

$$e^{xy}\cos 2x - 3y + x^2 = K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 (Problèmes de Cauchy) — 4 points

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants, en précisant l'intervalle de définition de la solution maximale.

1. $y' = y + x^2, \quad y(1) = 2.$

2. $x\,y' + 2y = e^x, \quad y(1) = 2.$

Solution. Les deux équations sont linéaires du premier ordre. On les écrit sous la forme $y' + p(x)\,y = q(x)$, sur un intervalle où p et q sont continues, puis on les multiplie par un facteur intégrant $u(x)$, solution de $u' = p(x)\,u$: le membre de gauche devient alors la dérivée du produit $u\,y$, et il ne reste plus qu'à intégrer.

1. L'équation s'écrit $y' - y = x^2$, avec $p(x) = -1$ et $q(x) = x^2$, continues sur $\mathbb{R}$. Le facteur intégrant vérifie $u' = -u$: on prend $u(x) = e^{-x}$. En multipliant l'équation par e^{-x}, on obtient

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = \big(e^{-x}y\big)' = x^2e^{-x}.$$

Deux intégrations par parties donnent une primitive du membre de droite :

$$\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int x\,e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2(x+1)\,e^{-x} = -\big(x^2 + 2x + 2\big)\,e^{-x},$$

puisque $\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -(x+1)\,e^{-x}$. Ainsi $e^{-x}y = -\big(x^2 + 2x + 2\big)\,e^{-x} + C$, c'est-à-dire

$$y(x) = Ce^x - x^2 - 2x - 2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

La condition $y(1) = 2$ s'écrit $Ce - 5 = 2$, d'où $C = 7e^{-1}$ et

$$y(x) = 7\,e^{x-1} - x^2 - 2x - 2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Comme p et q sont continues sur $\mathbb{R}$, cette solution est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier : c'est la solution maximale.

2. Le coefficient x de y' s'annule en 0, et la condition initiale est donnée en $x = 1 > 0$: on travaille sur $I =]0, +\infty[$, où l'équation s'écrit

$$y' + \frac{2}{x}\,y = \frac{e^x}{x},$$

avec $p(x) = 2/x$ et $q(x) = \mathrm{e}^x/x$ continues sur I. Le facteur intégrant vérifie $u' = \frac{2}{x}u$; en séparant les variables, $\ln|u| = 2\ln x + \text{cte}$, et l'on prend $u(x) = x^2$. En multipliant l'équation par x^2, on obtient

$$x^2y' + 2xy = \left(x^2y\right)' = x\,\mathrm{e}^x.$$

(On pouvait aussi le voir directement : une fois multipliée par x, l'équation de départ a pour membre de gauche la dérivée du produit x^2y.) Une intégration par parties donne $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x-1)\,\mathrm{e}^x$, d'où

$$x^2y = (x-1)\,\mathrm{e}^x + \mathrm{C}, \qquad \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

La condition $y(1) = 2$ donne $\mathrm{C} = 2$:

$$y(x) = \frac{(x-1)\,\mathrm{e}^x + 2}{x^2}, \qquad x \in \,]0, +\infty[\,.$$

Cette solution est définie sur tout I, et elle est maximale : quand $x \to 0^+$, le numérateur tend vers 1, donc $y(x) \sim 1/x^2 \to +\infty$, et elle ne se prolonge pas au-delà de 0.

Exercice 3 (Modèle de Gompertz) — 6 points

Un modèle de population est celui de Gompertz : pour $a, \mathrm{K} > 0$,

$$y'(t) = a\,y(t)\,\ln\!\left(\frac{\mathrm{K}}{y(t)}\right). \tag{1}$$

1. Montrer que l'équation (1) s'écrit $y' = f(y)$, où f est une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f ne peut pas être prolongée en une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Soit $0 < \varepsilon < \mathrm{K}$. Montrer qu'il existe une fonction $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g_\varepsilon = f$ sur $[\varepsilon, +\infty[$.
4. Trouver les points d'équilibre de f dans $[0, +\infty[$, c'est-à-dire les $\bar{y} \in [0, +\infty[$ tels que $f(\bar{y}) = 0$.
5. Montrer que si la donnée initiale appartient à l'intervalle $]0, \mathrm{K}[$, alors la solution de (1) reste dans cet intervalle.
6. Montrer que les solutions maximales associées sont globales.
7. Résoudre cette équation en utilisant la fonction $z = \ln y$ et l'équation vérifiée par z.
8. Quelle est la dérivée de $x \mapsto \ln(\ln x)$? Utiliser ceci pour résoudre l'équation une seconde fois, par la méthode des variables séparables.

Solution.

1. Pour $y > 0$, on pose $f(y) = a\,y\ln(\mathrm{K}/y) = a\left(y\ln\mathrm{K} - y\ln y\right)$, et $f(0) = 0$. Sur $]0, +\infty[$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dérivée

$$f'(y) = a\left(\ln\frac{\mathrm{K}}{y} - 1\right).$$

En 0, les croissances comparées donnent $y\ln y \to 0$ quand $y \to 0^+$, donc $f(y) \to 0 = f(0)$: f est continue sur $[0, +\infty[$, et l'équation (1) s'écrit $y' = f(y)$.

2. Supposons qu'une telle fonction g existe. Elle serait dérivable en 0, avec

$$g'(0) = \lim_{y\to 0^+}\frac{g(y) - g(0)}{y} = \lim_{y\to 0^+}\frac{f(y)}{y} = \lim_{y\to 0^+} a\ln\frac{\mathrm{K}}{y} = +\infty,$$

ce qui est absurde. Ainsi f n'est même pas dérivable à droite en 0 ; en particulier, f n'est lipschitzienne sur aucun voisinage de 0 dans $[0, +\infty[$, et le théorème de Cauchy–Lipschitz ne s'applique pas directement au voisinage de $y = 0$.

3. On prolonge f par sa tangente en ε :

$$g_\varepsilon(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } y \geq \varepsilon, \\ f(\varepsilon) + f'(\varepsilon)\,(y - \varepsilon) & \text{si } y < \varepsilon. \end{cases}$$

Les deux expressions ont même valeur $f(\varepsilon)$ et même dérivée $f'(\varepsilon)$ en ε ; g_ε est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée égale à f' sur $[\varepsilon, +\infty[$ et à la constante $f'(\varepsilon)$ sur $]-\infty, \varepsilon]$, qui est continue. Ainsi $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $g_\varepsilon = f$ sur $[\varepsilon, +\infty[$.

4. On a $f(0) = 0$, et pour $y > 0$, $f(y) = 0 \iff \ln(\mathrm{K}/y) = 0 \iff y = \mathrm{K}$. Les points d'équilibre sont donc 0 et K. De plus $f > 0$ sur $]0, \mathrm{K}[$ et $f < 0$ sur $]\mathrm{K}, +\infty[$.

5. Soit $y_0 \in]0, \mathrm{K}[$; on fixe $\varepsilon \in]0, y_0[$ et l'on considère le problème $(\mathrm{P}_\varepsilon) : y' = g_\varepsilon(y)$, $y(0) = y_0$. Comme g_ε est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il admet une unique solution maximale $y_\varepsilon : \ ]\mathrm{T}_-, \mathrm{T}_+[\to \mathbb{R}$.

— y_ε *reste sous* K. Comme $\mathrm{K} > \varepsilon$, on a $g_\varepsilon(\mathrm{K}) = f(\mathrm{K}) = 0$: la constante K est solution de l'équation $y' = g_\varepsilon(y)$. Par unicité (deux solutions qui coïncident en un instant coïncident partout), y_ε ne prend jamais la valeur K ; comme $y_\varepsilon(0) = y_0 < \mathrm{K}$, le théorème des valeurs intermédiaires donne $y_\varepsilon < \mathrm{K}$.

— y_ε *reste au-dessus de* y_0 *pour* $t \geq 0$. Supposons au contraire $y_\varepsilon(t_1) < y_0$ pour un $t_1 > 0$, et posons $s = \sup \mathrm{E}$, où $\mathrm{E} = \{t \in [0, t_1] \ : \ y_\varepsilon(t) \geq y_0\}$. L'ensemble E contient 0 et il est fermé (y_ε est continue), donc $s \in \mathrm{E}$, c'est-à-dire $y_\varepsilon(s) \geq y_0$; en particulier $s \neq t_1$, donc $s < t_1$. Par définition de s, on a $y_\varepsilon(t) < y_0$ pour $t \in]s, t_1]$, d'où $y_\varepsilon(s) \leq y_0$ par continuité ; ainsi $y_\varepsilon(s) = y_0$. Or $y_\varepsilon'(s) = g_\varepsilon(y_0) = f(y_0) > 0$, car $y_0 \in]\varepsilon, \mathrm{K}[$; donc $y_\varepsilon(t) > y_0$ pour $t > s$ proche de s : c'est une contradiction.

Ainsi $y_0 \leq y_\varepsilon(t) < \mathrm{K}$ pour $t \in [0, \mathrm{T}_+[$; sur cette plage de valeurs, $g_\varepsilon = f$, donc y_ε est solution de (1), à valeurs dans $]0, \mathrm{K}[$.

C'est la seule. Soit y une solution de (1) sur $[0, \mathrm{T}[$ avec $y(0) = y_0$. Posons

$$\tau = \sup\{t \in [0, \mathrm{T}[\ : \ \ y(s) \geq \varepsilon \text{ pour tout } s \in [0, t]\} ;$$

on a $\tau > 0$, puisque $y(0) = y_0 > \varepsilon$ et que y est continue. Sur $[0, \tau[$, on a $y \geq \varepsilon$, donc $f(y) = g_\varepsilon(y)$: y résout (P_ε), et par unicité elle coïncide avec y_ε ; en particulier $y \geq y_0 > \varepsilon$ sur $[0, \tau[$; si l'on avait $\tau < \mathrm{T}$, on aurait encore $y(\tau) \geq y_0 > \varepsilon$ et donc $y \geq \varepsilon$ un peu au-delà de τ, ce qui contredit la définition de τ. Donc $y = y_\varepsilon$ sur $[0, \mathrm{T}[$. Pour les temps négatifs, voir la question suivante.

6. *Temps positifs.* D'après la question 5, y_ε reste dans $[y_0, \mathrm{K}]$, donc bornée, pour $t \in [0, \mathrm{T}_+[$; le théorème d'explosion en temps fini, appliqué à (P_ε) dont le second membre est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, impose $\mathrm{T}_+ = +\infty$.

Tous les temps. Travaillons sur l'ouvert $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$. Si $y : \mathrm{J} \to]0, +\infty[$ est une solution, alors $z = \ln y$ vérifie $z' = y'/y = a(\ln \mathrm{K} - z)$ sur J (voir la question 7) ; réciproquement, si z résout cette équation sur J, alors $y = \mathrm{e}^z$ est une solution à valeurs dans $]0, +\infty[$. Cette correspondance conserve les intervalles de définition, donc aussi les solutions maximales. Or l'équation $z' = a(\ln \mathrm{K} - z)$ est linéaire à coefficients constants : toutes ses solutions sont définies sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, pour tout $y_0 > 0$ (et pas seulement pour $y_0 \in]0, \mathrm{K}[$), la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et ne s'annule jamais ; lorsque $y_0 \in]0, \mathrm{K}[$, elle reste dans $]0, \mathrm{K}[$ en tout temps, positif comme négatif, puisqu'elle ne peut pas croiser la solution stationnaire K.

Remarque. Bien que f ne soit pas lipschitzienne en 0, la seule solution à valeurs dans $[0, +\infty[$ vérifiant $y(0) = 0$ est la solution nulle. En effet, soit y une telle solution, définie sur un intervalle J, et supposons $y(t_1) > 0$ pour un $t_1 \in \mathrm{J}$. Notons J_1 le plus grand intervalle contenant t_1 sur lequel $y > 0$. Sur J_1, y est une solution à valeurs dans $]0, +\infty[$, donc la restriction d'une solution maximale Y, définie et strictement positive sur tout $\mathbb{R}$. Si J_1 avait une borne $t_2 \in \mathrm{J}$, on aurait $y(t_2) = 0$ par définition de J_1, et $y(t_2) = \mathrm{Y}(t_2) > 0$ par continuité : c'est absurde. Donc $\mathrm{J}_1 = \mathrm{J}$; en particulier $y(0) > 0$, ce qui contredit $y(0) = 0$.

7. Pour $y > 0$, posons $z = \ln y$. Alors

$$z' = \frac{y'}{y} = a \ln \frac{\mathrm{K}}{y} = a\,(\ln \mathrm{K} - z)\,,$$

équation linéaire du premier ordre : $z' + a\,z = a \ln \mathrm{K}$. Avec le facteur intégrant $u(t) = \mathrm{e}^{at}$ (solution de $u' = a\,u$), elle s'écrit $\left(\mathrm{e}^{at} z\right)' = a \ln \mathrm{K}\, \mathrm{e}^{at}$, d'où $\mathrm{e}^{at} z = \ln \mathrm{K}\, \mathrm{e}^{at} + \mathrm{C}$; la condition $z(0) = \ln y_0$ donne $\mathrm{C} = \ln y_0 - \ln \mathrm{K}$, soit $z(t) = \ln \mathrm{K} + (\ln y_0 - \ln \mathrm{K})\, \mathrm{e}^{-at}$. En revenant à

$y = \mathrm{e}^z$:

$$\boxed{y(t) = \mathrm{K}\exp\left(\ln\left(\frac{y_0}{\mathrm{K}}\right)\mathrm{e}^{-at}\right) = \mathrm{K}\left(\frac{y_0}{\mathrm{K}}\right)^{\mathrm{e}^{-at}}, \qquad t \in \mathbb{R}.}$$

Vérification. Avec $\lambda = \ln(y_0/\mathrm{K})$, on a $\ln y(t) = \ln \mathrm{K} + \lambda\,\mathrm{e}^{-at}$, donc $\frac{y'(t)}{y(t)} = -a\lambda\,\mathrm{e}^{-at} = a\big(\ln \mathrm{K} - \ln y(t)\big) = a\ln\frac{\mathrm{K}}{y(t)}$; de plus $y(0) = y_0$ et $y(t) \to \mathrm{K}$ quand $t \to +\infty$. Si $0 < y_0 < \mathrm{K}$, l'exposant $\ln(y_0/\mathrm{K})\,\mathrm{e}^{-at}$ est négatif et croît vers 0 : la solution croît de 0 (en $-\infty$) vers K ; si $y_0 > \mathrm{K}$, elle décroît de $+\infty$ (en $-\infty$) vers K, sans jamais exploser en temps fini.

8. Sur $]1, +\infty[$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(\ln x) = \frac{1}{x\ln x}$. Plus généralement, $x \mapsto \ln|\ln x|$ est dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$, de dérivée $\frac{1}{x\ln x}$.

Soit $y_0 \in]0,+\infty[\setminus\{\mathrm{K}\}$: la solution ne prend jamais la valeur K et ne s'annule pas, donc $u = y/\mathrm{K}$ reste strictement dans $]0,1[$ ou strictement dans $]1,+\infty[$. Comme $\ln(\mathrm{K}/y) = -\ln u$ et $y'/y = u'/u$, l'équation s'écrit

$$\frac{y'}{y\ln(\mathrm{K}/y)} = a \iff \frac{u'}{u\ln u} = -a \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|\ln u(t)| = -a.$$

Ainsi $\ln|\ln u(t)| = -at + \text{cte}$, donc $|\ln u(t)| = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-at}$ avec $\mathrm{C} > 0$; comme $\ln u$ garde un signe constant, $\ln u(t) = \ln u(0)\,\mathrm{e}^{-at}$, soit $\ln\frac{y(t)}{\mathrm{K}} = \ln\frac{y_0}{\mathrm{K}}\,\mathrm{e}^{-at}$: on retrouve la formule de la question 7.

Exercice 4 (Existence, unicité, explosion) — 3 points

On considère, pour $t > 0$, l'équation différentielle

$$w'(t) = |w(t)|^{3/4}, \tag{2}$$

munie d'une condition initiale $w(0) = w_0 \in \mathbb{R}$.

1. **Existence locale.** Montrer que la fonction $f : w \mapsto |w|^{3/4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, mais qu'elle n'est lipschitzienne sur aucun voisinage de 0. Que peut-on en déduire sur l'existence locale de solutions de (2), selon la valeur de w_0 ?
2. **Unicité.** Montrer que toute solution de (2) est croissante, et en déduire que la solution est unique lorsque $w_0 > 0$. On suppose ensuite $w_0 = 0$: montrer que, pour tout $c \geq 0$, la fonction

$$w_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq c, \\ \dfrac{(t-c)^4}{256} & \text{si } t \geq c, \end{cases}$$

est solution sur $[0,+\infty[$. A-t-on unicité ?
3. **Existence globale, explosion.** On suppose $w_0 > 0$. Calculer la solution (on pourra dériver $t \mapsto w(t)^{1/4}$). Est-elle globale ? Y a-t-il explosion en temps fini ?

Solution.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (où $f(w) = w^{3/4}$) et sur $]-\infty,0[$ (où $f(w) = (-w)^{3/4}$). Si f était L-lipschitzienne sur un voisinage $[-\eta,\eta]$ de 0, on aurait $|w|^{3/4} = |f(w) - f(0)| \leq \mathrm{L}\,|w|$, soit $|w|^{-1/4} \leq \mathrm{L}$ pour $0 < |w| \leq \eta$: c'est faux, puisque $|w|^{-1/4} \to +\infty$ quand $w \to 0$.

   Si $w_0 \neq 0$, le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique sur l'ouvert $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}\times]-\infty,0[$: il existe une solution locale (et elle y est unique). Si $w_0 = 0$, il ne s'applique pas ; mais la fonction nulle est solution, de sorte qu'il y a encore existence. (Plus généralement, la continuité de f suffit à l'existence locale : théorème de Peano.)
2. Toute solution vérifie $w' = |w|^{3/4} \geq 0$: elle est croissante.

   Cas $w_0 > 0$. Toute solution vérifie $w(t) \geq w_0 > 0$ pour $t \geq 0$: elle reste dans l'ouvert $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$, et le théorème de Cauchy–Lipschitz donne l'unicité.

Cas $w_0 = 0$. La fonction w_c est continue, et dérivable sur $[0, c[$ et sur $]c, +\infty[$. Sur $[0, c]$, $w_c = 0$ et $w_c' = 0 = |w_c|^{3/4}$. Pour $t > c$,

$$w_c'(t) = \frac{(t-c)^3}{64} = \left(\frac{(t-c)^4}{256}\right)^{3/4} = |w_c(t)|^{3/4},$$

puisque $256^{3/4} = 64$. En $t = c$, les deux morceaux se raccordent avec la valeur 0 et la dérivée 0 : w_c est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie l'équation sur $[0, +\infty[$, avec $w_c(0) = 0$. On obtient ainsi une infinité de solutions (une pour chaque $c \geq 0$, et la fonction nulle) : il n'y a pas unicité.

3. Tant que $w > 0$, on a $\left(w^{1/4}\right)' = \frac{1}{4} w^{-3/4} w' = \frac{1}{4}$, d'où $w(t)^{1/4} = w_0^{1/4} + \frac{t}{4}$ et

$$w(t) = \left(w_0^{1/4} + \frac{t}{4}\right)^4.$$

Réciproquement, cette fonction est définie et strictement positive pour tout $t \geq 0$, et elle vérifie l'équation et la condition initiale ; par unicité (question 2), c'est *la* solution, et elle est définie sur $[0, +\infty[$: la solution est globale. Elle n'explose pas en temps fini (elle croît comme $t^4/256$). De même, pour $w_0 = 0$, les solutions w_c sont globales. (Pour $w_0 < 0$, la solution $-\left(|w_0|^{1/4} - t/4\right)^4$ atteint 0 à l'instant $4\,|w_0|^{1/4}$, puis se prolonge comme dans le cas $w_0 = 0$: elle est globale, mais l'unicité est perdue à partir de cet instant.)

Exercice 5 (Lemme de Grönwall) — 3 points

1. Énoncer le lemme de Grönwall.

2. Le démontrer.

Solution. Voir les notes de cours.

Exercice 6 (Étude qualitative d'un problème de Cauchy) — Bonus : 4 points

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{\arctan\left(y(x)\right)}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il possède une unique solution maximale $y : \ ]\mathrm{T}_-, \mathrm{T}_+[\to \mathbb{R}$.

2. Montrer qu'il existe $\beta \in [1, +\infty]$ tel que $\lim_{x \to \mathrm{T}_+} y(x) = \beta$.

3. Démontrer que $\mathrm{T}_+ = +\infty$, de l'une des deux façons suivantes.

a) Supposer T_+ fini. À l'aide d'une suite convenable convergeant vers T_+, et en utilisant le théorème des accroissements finis, arriver à une contradiction.

b) Démontrer l'égalité

$$y(x)\arctan\left(y(x)\right) - \frac{1}{2}\ln\left(y(x)^2 + 1\right) = \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{K},$$

où K est une constante que l'on calculera. Supposer que T_+ est fini et arriver à une contradiction.

4. Calculer β (de deux façons).

5. Tracer l'allure du graphe de la solution.

Solution. On note $f(x, y) = x/\arctan y$, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, et U l'ouvert $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, qui contient le point $(0, 1)$.

1. Sur U, la fonction $\arctan y$ ne s'annule pas et f est de classe $\mathcal{C}^1$. Le théorème de Cauchy–Lipschitz donne une unique solution maximale $y : \ ]\mathrm{T}_-, \mathrm{T}_+[\to]0, +\infty[$, avec $\mathrm{T}_- < 0 < \mathrm{T}_+$. (Une solution ne peut pas sortir de U sans passer par $y = 0$, où f n'est pas définie : c'est bien la solution maximale du problème.)

2. Pour $x \in [0, T_+[$, on a $y(x) > 0$, donc $\arctan y(x) > 0$ et $y'(x) = x/\arctan y(x) \geq 0$: y est croissante sur $[0, T_+[$, et $y \geq y(0) = 1$. Par le théorème de la limite monotone, y admet en T_+ une limite $\beta \in [1, +\infty]$.

3. *Remarque préliminaire.* Si $T_+ < +\infty$, alors $\beta = +\infty$: sinon, pour $x \in [0, T_+[$, le point $\big(x, y(x)\big)$ resterait dans le compact $[0, T_+] \times [1, \beta]$ de U, ce qu'interdit le théorème des bouts (ou d'explosion en temps fini).

a) Supposons T_+ fini, et soit (x_n) une suite de $]0, T_+[$ convergeant vers T_+ ; d'après la remarque, $y(x_n) \to +\infty$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]0, x_n[$ tel que

$$y(x_n) - 1 = x_n\, y'(c_n) = \frac{x_n\, c_n}{\arctan y(c_n)} \leq \frac{T_+^2}{\arctan 1} = \frac{4\,T_+^2}{\pi},$$

car $y(c_n) \geq 1$. La suite $\big(y(x_n)\big)$ est donc bornée : contradiction.

b) Soit $G(u) = u \arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2)$. Alors $G'(u) = \arctan u + \frac{u}{1+u^2} - \frac{u}{1+u^2} = \arctan u$, donc $\big(G \circ y\big)'(x) = \arctan\big(y(x)\big)\, y'(x) = x$, et $G\big(y(x)\big) = \frac{1}{2}x^2 + K$, avec

$$K = G(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Supposons T_+ fini. Alors $G\big(y(x)\big) \leq \frac{1}{2}T_+^2 + K$ sur $[0, T_+[$. Or, pour $u \geq 1$, $G'(u) = \arctan u \geq \frac{\pi}{4}$, donc $G(u) \geq G(1) + \frac{\pi}{4}(u-1) \to +\infty$: y est donc bornée sur $[0, T_+[$, c'est-à-dire $\beta < +\infty$, ce qui contredit la remarque.

Dans les deux cas, $T_+ = +\infty$.

4. On trouve $\beta = +\infty$.

— *Par comparaison.* Pour $x \geq 0$, $0 < \arctan y(x) < \frac{\pi}{2}$, donc $y'(x) \geq \frac{2x}{\pi}$, et en intégrant, $y(x) \geq 1 + \frac{x^2}{\pi} \to +\infty$.

— *Par l'égalité de la question 3.b.* $G\big(y(x)\big) = \frac{1}{2}x^2 + K \to +\infty$; si β était fini, on aurait $G\big(y(x)\big) \to G(\beta)$, par continuité de G : contradiction.

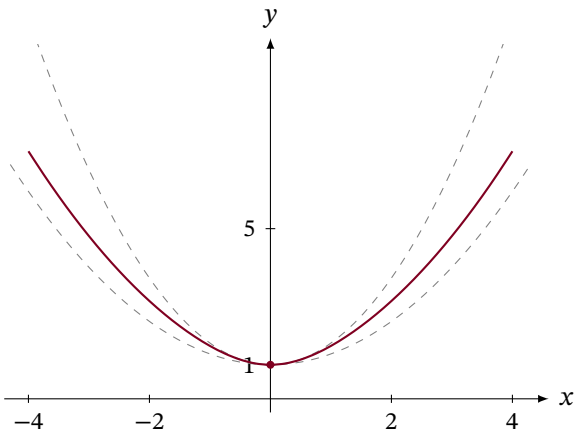
5. *Parité.* La fonction $z(x) = y(-x)$ vérifie $z'(x) = -y'(-x) = \dfrac{x}{\arctan z(x)}$ et $z(0) = 1$: par unicité, $z = y$. Ainsi $T_- = -T_+ = -\infty$ et y est paire.

Variations. y décroît sur $]-\infty, 0]$ et croît sur $[0, +\infty[$, avec un minimum $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ et $y''(0) = 1/\arctan 1 = 4/\pi$: près de 0, $y(x) \approx 1 + \frac{2x^2}{\pi}$.

Comportement à l'infini. Pour $x \geq 0$, $\frac{\pi}{4} \leq \arctan y < \frac{\pi}{2}$ donne $\frac{2x}{\pi} \leq y' \leq \frac{4x}{\pi}$, d'où

$$1 + \frac{x^2}{\pi} \leq y(x) \leq 1 + \frac{2x^2}{\pi}.$$

Plus précisément, $G(u) \sim \frac{\pi}{2}u$ quand $u \to +\infty$, et $G\big(y(x)\big) \sim \frac{x^2}{2}$ donne $y(x) \sim \frac{x^2}{\pi}$: le graphe a l'allure d'une parabole.



La solution (calculée numériquement), entre les paraboles $1 + x^2/\pi$ *et* $1 + 2x^2/\pi$ *(tirets).*

— Fin du corrigé —