ALGÈBRE LINÉAIRE

FICHE 1 : MATRICES

Exercice 1.
On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices suivantes, lorsque les opérations ont un sens; lorsqu'elles n'en ont pas, expliquer pourquoi :

$$A - C; \qquad C - 2D; \qquad B \times C; \qquad C \times B; \qquad B^2; \qquad C^2$$

Exercice 2.
Calculer les matrices suivantes, lorsque les opérations ont un sens; lorsqu'elles n'en ont pas, expliquer pourquoi :

$$\begin{pmatrix} 10 & -12 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(5) + \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ x & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.
Calculer les matrices suivantes :

$$(-i) \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 0 & 3i-5 \\ i & 4i \end{pmatrix} - (1+2i) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 3i & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 5i & 2-i \\ 7i-4 & 10i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2+i \end{pmatrix}$$

Exercice 4.
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses; justifier la réponse :

(1) Si le produit de deux matrices est nul, alors l'une des deux matrices est nulle.
(2) Si A, B, C sont trois matrices telles que $AB = AC$ avec A non nulle, alors $B = C$.

Exercice 6.
Montrer la propriété suivante :
Le produit de deux matrices carrées triangulaires supérieures, de même ordre n, est encore une matrice carrée triangulaire supérieure d'ordre n. Sur la diagonale, on obtient encore le produit entre-eux des coefficients diagonaux.

Exercice 7.

On considère les deux matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

ainsi que la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par: $a_{ij} = 2^{i+j}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

(1) Calculer les matrices CB et BC.
(2) Dans le cas $n = 3$, écrire la matrice A puis calculer BA.
(3) Dans le cas général, calculer les matrices BA, AC et BAC.

Exercice 8.

Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$ et $B \times A$ puis calculer $(A - B)^2$.

Exercice 9. ***Extrait du DS Mars 2024***

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(1) Trouver une matrice N telle que $A = -2I_3 + N$.
(2) Montrer que N est une matrice nilpotente, et calculer les puissances successives de N.
(3) Remarquer que $-2I_3$ et N commutent.
(4) L'objectif de cette question est de calculer la matrice A^n. Pour cela :
  (a) Montrer qu'il existe des réels a_n, b_n, c_n tels que $A^n = a_n I_3 + b_n N + c_n N^2$. Préciser les expressions de ces réels en fonction de n.
  (b) En déduire la matrice A^n en fonction de l'entier naturel n, pour $n \geqslant 2$.
  (c) Que devient cette expression de A^n dans les cas : n pair puis n impair ?

Exercice 10.

Ecrire la transposée de chacune des matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 11.

Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, qu'on appelle *la trace* de A.

Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes:

(1) $\operatorname{Tr}(A + B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$.
(2) $\operatorname{Tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{Tr}(A)$.
(3) $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Exercice 12.

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $AB - BA \neq I_n$. *(On pourra se servir de la trace.)*