Corrections

Exercice 1.1.

- $A - C$: impossible car A est de taille 3×2 et C est de taille 2×3.
- $C - 2D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+8 & -1-2 & 0-10 \\ 2-6 & 0+14 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -10 \\ -4 & 14 & 1 \end{pmatrix}$.
- $B \times C = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\cdot 4 + 2\cdot 2 & (-5)\cdot(-1) + 2\cdot 0 & -5\cdot 0 + 2\cdot(-3) \\ 3\cdot 4 + (-1)\cdot 2 & 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 & 3\cdot 0 + (-1)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 5 & -6 \\ 10 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
- $C \times B$: impossible car C est 2×3 et B est 2×2.
- $B^2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-5)\cdot(-5) + 2\cdot 3 & (-5)\cdot 2 + 2\cdot(-1) \\ 3\cdot(-5) + (-1)\cdot(3) & 3\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -12 \\ -18 & 7 \end{pmatrix}$.
- C^2 : impossible car C est 2×3 donc C n'est pas une matrice carrée.

Exercice 1.2.

- Les deux premières opérations sont impossibles car les matrices n'ont pas la même taille pour l'addition, et les dimensions ne conviennent pas pour la multiplication.
- La troisième opération est possible :

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 10 + 6\cdot(-6) & 2\cdot(-12) + 6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 0 \end{pmatrix}$$

- La quatrième opération est impossible car on ne peut pas additionner un scalaire et une matrice.
- La cinquième opération est possible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ x & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 + 1\cdot 2 + 2\cdot y \\ x\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 1 & x\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2+2y \\ x+1 & -2+y \end{pmatrix}.$$

  Ensuite , on peut multiplier à droite par le vecteur $\begin{pmatrix} z \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2+2y \\ x+1 & -2+y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z + (2+2y)\cdot 2 \\ (x+1)z + (-2+y)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z + 4 + 4y \\ (x+1)z - 4 + 2y \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.3.

- Pour le premier exercice, on calcule d'abord les produits par les scalaires :

$$(-i)\begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 0 & 3i-5 \\ i & 4i \end{pmatrix} - (1+2i)\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 3i & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i+1 & -i \\ 0 & 3+5i \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(1+2i) & i-2 \\ -(3i-6) & 0 \\ -(2+4i) & 5+10i \end{pmatrix}$$

  Ainsi, en additionant les deux matrices, on obtient :

$$\begin{pmatrix} -2i+1-1-2i & -i+i-2 \\ 0-3i+6 & 3+5i+0 \\ 1-2-4i & 4+5+10i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4i & -2 \\ 6-3i & 3+5i \\ -1-4i & 9+10i \end{pmatrix}.$$

- Pour le deuxième exercice, on effectue la multiplication matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0 & 5i & 2-i \\ 7i-4 & 10i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot(-1) + 5i\cdot i + (2-i)(2+i) \\ (7i-4)(-1) + 10i\cdot i + 0\cdot(2+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+4+5 \\ -7i+4-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6-7i \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.4.
Calculons d'abord A^2 :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A.$$
Calculons ensuite A^3 :
$$A^3 = A^2 \cdot A = 3A \cdot A = 3A^2 = 3 \cdot 3A = 3^2 A.$$
Par récurrence, on montre que pour tout $n \geq 1$ entier naturel, on a $A^n = 3^{n-1}A$. Notons que pour $n = 1$ on a bien $A^1 = 3^0 A = A$. Supposons que la formule est vraie pour un certain $n \geq 1$, c'est-à-dire que $A^n = 3^{n-1}A$. On va montrer qu'elle est aussi vraie pour $n+1$:
$$A^{n+1} = A^n \cdot A = 3^{n-1}A \cdot A = 3^{n-1}A^2 = 3^{n-1} \cdot 3A = 3^n A.$$
On en conclut, par le principe de récurrence, que pour tout $n \geq 1$ entier naturel, on a $A^n = 3^{n-1}A$. Autrement dit,
$$A^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.5.
(1.5.1) Faux. Par exemple, si on considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
alors on a
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Mais ni A ni B ne sont des matrices nulles.

(1.5.2) Faux. Par exemple, si on considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix},$$
alors on a
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et
$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On constate que $AB = AC$ mais $B \neq C$.

Exercice 1.6.
Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre n. Par définition, on a $a_{ij} = 0$ et $b_{ij} = 0$ pour tout $i > j$. On note $C = AB = (c_{ij})$ le produit des deux matrices. Par définition du produit matriciel, on a :
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$
Considérons le cas où $i > j$. Dans cette situation, pour chaque $k \leq j < i$, on a $a_{ik} = 0$ car A est triangulaire supérieure. De même, pour chaque $k \geq i > j$, on a $b_{kj} = 0$ car B est triangulaire supérieure. Ainsi, dans la somme ci-dessus, chaque

terme est nul, ce qui implique que $c_{ij} = 0$ pour tout $i > j$. Donc, la matrice C est triangulaire supérieure. Considérons maintenant le cas où $i = j$. Dans cette situation, on a :

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{ki} + a_{ii} b_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{ki}.$$

Mais pour chaque $k < i$, on a $b_{ki} = 0$ car B est triangulaire supérieure, et pour chaque $k > i$, on a $a_{ik} = 0$ car A est triangulaire supérieure. Ainsi, les deux sommes aux extrémités sont nulles, et il reste :

$$c_{ii} = a_{ii} b_{ii}.$$

Cela montre que sur la diagonale de la matrice C, les coefficients sont les produits des coefficients diagonaux de A et B.

Exercice 1.7.

(1.7.1) Calculons d'abord CB :

$$CB = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Maintenant, calculons BC :

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

(1.7.2) Pour $n = 3$, la matrice A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{1+1} & 2^{1+2} & 2^{1+3} \\ 2^{2+1} & 2^{2+2} & 2^{2+3} \\ 2^{3+1} & 2^{3+2} & 2^{3+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 8 & 16 & 32 \\ 16 & 32 & 64 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 8 & 16 & 32 \\ 16 & 32 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+8+16 & 8+16+32 & 16+32+64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 56 & 112 \end{pmatrix}.$$

(1.7.3) Dans le cas général, calculons BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{1+1} & 2^{1+2} & \cdots & 2^{1+n} \\ 2^{2+1} & 2^{2+2} & \cdots & 2^{2+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{n+1} & 2^{n+2} & \cdots & 2^{n+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} 2^{i+1} & \sum_{i=1}^{n} 2^{i+2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} 2^{i+n} \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant AC :

$$AC = \begin{pmatrix} 2^{1+1} & 2^{1+2} & \cdots & 2^{1+n} \\ 2^{2+1} & 2^{2+2} & \cdots & 2^{2+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{n+1} & 2^{n+2} & \cdots & 2^{n+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} 2^{1+j} \\ \sum_{j=1}^{n} 2^{2+j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} 2^{n+j} \end{pmatrix}.$$

Enfin, calculons BAC :

$$BAC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} 2^{1+j} \\ \sum_{j=1}^{n} 2^{2+j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} 2^{n+j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2^{i+j}.$$

Exercice complémentaire 1. Calculer explicitement les sommes obtenues dans les expressions de BA, AC et BAC en utilisant la formule de la somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{m} r^k = \frac{1-r^{m+1}}{1-r} \quad \text{pour } r \neq 1.$$

Exercice 1.8.
Calculons d'abord $A \times B$:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 5 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 17 & 7 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, calculons $B \times A$:

$$B \times A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 19 & 6 \end{pmatrix}.$$

On constate que $A \times B \neq B \times A$. Enfin, calculons $(A-B)^2$:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-3 & -1-(-1) \\ 3-4 & 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 0+0 \\ 2+3 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.9.

(1.9.1) On peut écrire A comme la somme de la matrice $-2I_3$ et de la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, il suffit de noter que

$$-2I_3 + N = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A.$$

(1.9.2) Calculons les puissances successives de N :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$N^3 = N^2 \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $N^3 = 0$, donc N est une matrice nilpotente d'ordre 3.

(1.9.3) On calcule $-2I_3N$ et $N(-2I_3)$:

$$-2I_3N = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$N(-2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $-2I_3N = N(-2I_3)$, donc $-2I_3$ et N commutent.

> **Rappel 1.** Rappelons que le produit de deux matrices A et B n'est pas commutatif en géneral, c'est-à-dire que AB n'est pas forcément égal à BA. Cependant, lorsque on a deux matrices qui commutent, on peut utiliser des propriétés spéciales, comme le binôme de Newton pour les matrices, ce qui facilite grandement les calculs de puissances de matrices. Ainsi, si A et B commutent, alors pour tout entier naturel n, on a :
>
> $$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k.$$

(1.9.4) (a) Puisque $-2I_3$ et N commutent, on peut utiliser le binôme de Newton pour les matrices :

$$A^n = (-2I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2I_3)^{n-k} N^k.$$

Or, comme $N^3 = 0$, les termes avec $k \geq 3$ sont nuls. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= (-2I_3)^n + \binom{n}{1}(-2I_3)^{n-1}N + \binom{n}{2}(-2I_3)^{n-2}N^2 \\ &= (-2)^n I_3 + \frac{n!}{1!(n-1)!}(-2)^{n-1}N + \frac{n!}{2!(n-2)!}(-2)^{n-2}N^2. \end{aligned}$$

On peut donc écrire A^n sous la forme $A^n = a_nI_3 + b_nN + c_nN^2$ avec :

$$a_n = (-2)^n, \quad b_n = n(-2)^{n-1}, \quad c_n = \frac{n(n-1)}{2}(-2)^{n-2}.$$

(b) En substituant les valeurs de a_n, b_n, et c_n, on obtient :

$$A^n = (-2)^n I_3 + n(-2)^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}(-2)^{n-2}N^2.$$

(c) Pour n pair, $(-2)^n$ est positif, tandis que pour n impair, $(-2)^n$ est négatif. Les autres termes suivent le même schéma en fonction de la parité de n. Ainsi, on peut observer que la structure de A^n change en fonction de la parité de n, mais la forme générale reste la même.

Exercice 1.10.

La transposée d'une matrice s'obtient en échangeant ses lignes et ses colonnes. Ainsi, on a :

$$D^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad T^\top = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.11.

(1.11.1) Par définition de la trace, on a :

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B).$$

(1.11.2) On a :

$$\mathrm{Tr}(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha\,\mathrm{Tr}(A).$$

(1.11.3) Pour montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, on calcule d'abord $\mathrm{Tr}(AB)$:

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}.$$

Maintenant, calculons $\mathrm{Tr}(BA)$:

$$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n}(BA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}.$$

On remarque que dans les deux expressions, on somme les mêmes termes $a_{ik}b_{ki}$ et $b_{ik}a_{ki}$ pour tous les indices i et k. Ainsi, on conclut que :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Exercice 1.12.

Supposons par l'absurde que $AB - BA = I_n$. En prenant la trace des deux côtés de cette égalité, on obtient :

$$\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(I_n).$$

Or, par linéarité de la trace, on a :

$$\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA).$$

En utilisant la propriété $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ démontrée précédemment, on obtient :

$$\mathrm{Tr}(AB - BA) = 0.$$

D'un autre côté, la trace de l'identité I_n est égale à n, car elle est la somme des n coefficients diagonaux égaux à 1. Ainsi, on a :

$$\mathrm{Tr}(I_n) = n.$$

Cela conduit à une contradiction, car on a trouvé que $\mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$ et $\mathrm{Tr}(I_n) = n$, ce qui implique que $0 = n$. Comme n est un entier strictement positif, cette égalité est impossible. Par conséquent, notre supposition initiale est fausse, et on conclut que $AB - BA \neq I_n$.