

ALGÈBRE LINÉAIRE

FICHE 2 : SYSTÈMES LINÉAIRES OU AFFINES

Exercice 1.

Résoudre les deux systèmes d'équations suivants, par les méthodes vues au lycée :

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 1 \\ 3x - y - 3z + 2t &= 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ 3x + 3y - z &= 0 \end{cases}$$

Exercice 2.

Résoudre les systèmes affines suivants, par la méthode du “pivot de Gauss” : on échelonnera les systèmes en effectuant des opérations “élémentaires” sur les lignes uniquement (et pas sur les colonnes).

Pour ce faire, il est fortement conseillé d'utiliser l'écriture matricielle $[A \mid B]$ du système et d'échelonner la matrice A .

Conclure chaque système en précisant l'ensemble S_i de ses solutions (i désignant son numéro) :

$$(SE_1) \begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} \quad (SE_2) \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases} \quad (SE_3) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y - 4z = 2 \\ 3x - y - 4z = 3 \end{cases}$$

$$(SE_4) \begin{cases} 2x + 7y + 3z = -5 \\ x + 3y + 2z + t = -2 \\ 3x + 8y + 8z + 11t = 13 \\ -2x - 8y - 2z + 6t = 18 \end{cases} \quad (SE_5) \begin{cases} x - 2y + 4z - 5t = 4 \\ y - z + t = -3 \\ x + 3y - 3t = 1 \\ x + 2y + z - 4t = 4 \end{cases}$$

$$(SE_6) \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ 3x + z + 2t = 1 \\ 2x + y - 3z + 5t = 1 \\ -4x + 2y + t = 0 \end{cases} \quad (SE_7) \begin{cases} 3x - 3y + 3z + 2t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - 5y + 5z + 7t = 0 \end{cases}$$

$$(SE_8) \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases} \quad (SE_9) \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases}$$

$$(SE_{10}) \begin{cases} 2x - z + t = 1 \\ 3x + y - z + 2t = 2 \\ -x - y + 3z = -1 \\ x + 2y + z - t = 1 \end{cases} \quad (SE_{11}) \begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ x + y + z + t = 5 \\ x - 2y + 3z - t = 10 \\ 3x + y + t = 4 \end{cases}$$

(SE_{10}) : **DS Mars 2024**

(SE_{11}) : **DS Février 2025**

Exercice 3.

On considère les systèmes suivants, où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre :

$$(SE_{12}) \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 2 \\ -2x + 5y - 8z = -10 \\ 3x - 6y + mz = m \end{cases} \quad (SE_{13}) \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 2 \\ -2x + 5y - 8z = -10 \\ 3x - 6y + mz = m \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

- (1) Écrire matriciellement le premier système. Le résoudre par la méthode du pivot de Gauss, en discutant suivant les valeurs de m .
- (2) En déduire les solutions du second système.

Exercice 4.

Résoudre les systèmes affines suivants en discutant suivant les valeurs du paramètre réel a :

$$(SE_{14}) \begin{cases} x + y + (2a - 1)z = 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 3(a + 1) \end{cases} \quad (SE_{15}) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

Exercice 5.

Résoudre les systèmes affines suivants en discutant suivant les valeurs des paramètres réels a et b :

$$(SE_{16}) \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + t = a \\ x + t = b \end{cases} \quad (SE_{17}) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 3x + 4y + 5z = a \\ y + 3z = b \end{cases}$$