ALGÈBRE LINÉAIRE

FICHE 3 : ESPACES VECTORIELS - SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^2$ de l'opération interne $+$ et de l'opération externe $\cdot$ suivantes :
$\forall\ (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \\ \lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, \lambda^{-1} y) \text{ si } \lambda \neq 0, \text{ et } 0 \cdot (x,y) = (0;0). \end{cases}$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2.
Vérifier si $\mathbb{R}^2$, muni des opérations interne et externe suivantes, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:
pour tout $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ et $\lambda \cdot (a,b) = (a, \lambda b)$.
(2) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ et $\lambda \cdot (a,b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b)$.
(3) $(a,b)+(c,d) = (c,d)$ et $\lambda \cdot (a,b) = (\lambda a, \lambda b)$.
(4) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ et $\lambda \cdot (a,b) = (\lambda a, \lambda b)$.

Exercice 3. Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $\vec{a} = (0;2;-2;1)$, $\vec{b} = (1;3;1;-1)$ et $\vec{c} = (-3;0;4;2)$.
Calculer les vecteurs $\vec{v} = \vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ et $\vec{w} = 5(2\vec{a} - 3\vec{c}) + 2(-\vec{b} - 3\vec{a}) + (5\vec{b} + 12\vec{c})$.

Exercice 4. Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $\vec{a} = (1;0;2;4)$, $\vec{b} = (0;1;9;2)$ et $\vec{c} = (-4;2;10;-12)$.
Trouver deux réels x et y tels que $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}$.

Exercice 5. Dans chaque cas, établir si l'ensemble V_i, $1 \leq i \leq 6$, est un sous-espace vectoriel de V :

(1) $V = \mathbb{R}$ et $V_1 = \mathbb{Q}$.
(2) $V = \mathbb{R}^2$ et $V_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.
(3) $V = \mathbb{R}^3$ et $V_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$.
(4) $V = \mathbb{R}^2$ et $V_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$. Représenter géométriquement l'ensemble V_4.
(5) $V = \mathbb{R}^2$ et $V_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$. Représenter géométriquement l'ensemble V_5.
(6) $V = \mathbb{R}^4$ et $V_6 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \text{ et } x + z + t = 0\}$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ données par : $\forall\ f,g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f+g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \lambda \cdot f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$? Justifier.

(1) $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$.
(2) $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$.
(3) $F_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante}\}$.
(4) $F_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(-x) = -f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.
Les sous-ensembles F_i de E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}[X]$? Justifier.

(1) $F_1 = \{P \in E \mid P(X-1) = P'(X^2)\}$.
(2) $F_2 = \{P \in E \mid P(-1) = 5\}$.
(3) $F_3 = \{P \in E \mid P = 0$ ou P est de degré impair $\}$.
(4) $F_4 = \{P \in E \mid \deg P \leqslant n\}$, où $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 8. Soient $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_p$ et $\vec{b}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On considère l'ensemble

$$\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p\} = \{\alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{a}_p \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que :

(1) $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
(2) si $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_p\} \cap \mathrm{Vec}\{\vec{b}\}$ n'est pas nul, alors $\mathrm{Vec}\{\vec{b}\} \subset \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_p\}$.

Exercice 9. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel de l'exercice 6.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(1) La fonction exponentielle est dans $\mathrm{Vec}\{\sin, \cos\}$.
(2) L'ensemble des fonctions tendant vers 0 en $+\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
(3) L'ensemble des fonctions tendant vers 1 en $+\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 10. On considère les ensembles suivants :

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0$ et $y + z = 0\}$.
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$.
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
$H = \{(x + z, x - z, 2x + y + 3z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

(1) Montrer que E, F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
(2) Déterminer $E \cap F$, $E \cap G$ et $E \cap H$.
(3) Les ensembles $E \cup F$ et $E \cup G$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 11. Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Soit l'ensemble $V_1 + V_2 = \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \mid \vec{v}_1 \in V_1$ et $\vec{v}_2 \in V_2\}$.

(1) Montrer que $V_1 \cap V_2$ et $V_1 + V_2$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
(2) Montrer que $V_1 \cup V_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$.
(3) En déduire que si $V_1 \neq \mathbb{R}^n$ et $V_2 \neq \mathbb{R}^n$, alors $V_1 \cup V_2 \neq \mathbb{R}^n$.

Exercice 12. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse :

(1) Pour $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{Vec}\{\vec{a}\} \cup \mathrm{Vec}\{\vec{b}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.
(2) Soient $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_p \in \mathbb{R}^n$ ($p \geq 2$).
Si $\vec{a}_p \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{p-1}\}$, alors $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_p\} = \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{p-1}\}$.
(3) Soient $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_p, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q \in \mathbb{R}^n$.
Si $\mathrm{Vec}\{\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_q\} \subset \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_p\}$, alors $q \leq p$.

Exercice 13. Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\beta \neq 0$ et $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (0; \cdots; 0)$.
Montrer qu'on a $\mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{c}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{b}, \vec{c}\}$.

Exercice 14. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $\vec{a} = (-1; 2; 1)$ et $\vec{b} = (0; 1; -1)$.

(1) Déterminer $x \in \mathbb{R}$ pour que $(x; 1; 2) \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.
(2) Soient $\vec{u} = (1; 0; -3)$ et $\vec{v} = (-2; 5; 1)$. Montrer que $\mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{b}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{u}, \vec{v}\}$.