ALGÈBRE LINÉAIRE
FICHE DE TD 3 : ESPACES VECTORIELS

Espaces Vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^2$ de l'opération interne $+$ et de l'opération externe $\cdot$ suivantes :

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \\ \lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, \lambda^{-1} y) \text{ si } \lambda \neq 0, \text{ et } 0 \cdot (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

→ Correction

Exercice 2. Vérifier si $\mathbb{R}^2$, muni des opérations interne et externe suivantes, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

(2.1) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ et $\lambda \cdot (a,b) = (a, \lambda b)$.

(2.2) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ et $\lambda \cdot (a,b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b)$.

(2.3) $(a,b)+(c,d) = (c,d)$ et $\lambda \cdot (a,b) = (\lambda a, \lambda b)$.

(2.4) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ et $\lambda \cdot (a,b) = (\lambda a, \lambda b)$.

→ Correction

Exercice 3. Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $\vec{a} = (0,2,-2,1)$, $\vec{b} = (1,3,1,-1)$ et $\vec{c} = (-3,0,4,2)$. Calculer les vecteurs $\vec{v} = \vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ et $\vec{w} = 5(2\vec{a} - 3\vec{c}) + 2(-\vec{b} - 3\vec{a}) + (5\vec{b} + 12\vec{c})$.

→ Correction

Exercice 4. Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $\vec{a} = (1,0,2,4)$, $\vec{b} = (0,1,9,2)$ et $\vec{c} = (-4,2,10,-12)$. Trouver deux réels x et y tels que $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}$.

→ Correction

Exercice 5. Dans chaque cas, établir si l'ensemble V_i, $1 \leq i \leq 6$, est un sous-espace vectoriel de V :

(5.1) $V = \mathbb{R}$ et $V_1 = \mathbb{Q}$.

(5.2) $V = \mathbb{R}^2$ et $V_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

(5.3) $V = \mathbb{R}^3$ et $V_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$.

(5.4) $V = \mathbb{R}^2$ et $V_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$. Représenter géométriquement l'ensemble V_4.

(5.5) $V = \mathbb{R}^2$ et $V_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$. Représenter géométriquement l'ensemble V_5.

(5.6) $V = \mathbb{R}^4$ et $V_6 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \text{ et } x + z + t = 0\}$.

→ Correction

Exercice 6. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ données par : $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$f+g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \lambda \cdot f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$? Justifier.

(6.1) $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$.

(6.2) $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$.

(6.3) $F_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante}\}$.

(6.4) $F_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(-x) = -f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$.

→ Correction

Exercice 7. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Les sous-ensembles F_i de E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}[X]$? Justifier.

(7.1) $F_1 = \{P \in E \mid P(X-1) = P'(X^2)\}$.

(7.2) $F_2 = \{P \in E \mid P(-1) = 5\}$.

(7.3) $F_3 = \{P \in E \mid P = 0 \text{ ou } P \text{ est de degré impair}\}$.

(7.4) $F_4 = \{P \in E \mid \deg P \leq n\}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

→ Correction

Exercice 8. Soient $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ et $\vec{b}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On considère l'ensemble

$$\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\} = \{\alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{a}_p \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que :

(8.1) $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(8.2) si $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\} \cap \mathrm{Vec}\{\vec{b}\}$ n'est pas nul, alors $\mathrm{Vec}\{\vec{b}\} \subset \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$.

→ Correction

Exercice 9. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de Exercice 6. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(9.1) La fonction exponentielle est dans $\mathrm{Vec}\{\sin, \cos\}$.

(9.2) L'ensemble des fonctions tendant vers 0 en $+\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(9.3) L'ensemble des fonctions tendant vers 1 en $+\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

→ Correction

Exercice 10. On considère les ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0 \text{ et } y+z=0\}. \\ F & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\}. \\ G & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}. \\ H & = & \{(x+z, x-z, 2x+y+3z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

(10.1) Montrer que E, F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(10.2) Déterminer $E \cap F$, $E \cap G$ et $E \cap H$.

(10.3) Les ensembles $E \cup F$ et $E \cup G$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

→ Correction

Exercice 11. Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Soit l'ensemble $V_1 + V_2 = \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \mid \vec{v}_1 \in V_1 \text{ et } \vec{v}_2 \in V_2\}$.

(11.1) Montrer que $V_1 \cap V_2$ et $V_1 + V_2$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

(11.2) Montrer que $V_1 \cup V_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$.

(11.3) En déduire que si $V_1 \neq \mathbb{R}^n$ et $V_2 \neq \mathbb{R}^n$, alors $V_1 \cup V_2 \neq \mathbb{R}^n$.

→ Correction

Exercice 12. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse :

(12.1) Pour $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{Vec}\{\vec{a}\} \cup \mathrm{Vec}\{\vec{b}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

(12.2) Soient $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p \in \mathbb{R}^n$ $(p \geq 2)$. Si $\vec{a}_p \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{p-1}\}$, alors $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\} = \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{p-1}\}$.

(12.3) Soient $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathrm{Vec}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q\} \subset \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$, alors $q \leq p$.

→ Correction

Exercice 13. Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\beta \neq 0$ et $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (0, \dots, 0)$. Montrer qu'on a $\mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{c}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{b}, \vec{c}\}$.

→ Correction

Exercice 14. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $\vec{a} = (-1, 2, 1)$ et $\vec{b} = (0, 1, -1)$.

(14.1) Déterminer $x \in \mathbb{R}$ pour que $(x, 1, 2) \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

(14.2) Soient $\vec{u} = (1, 0, -3)$ et $\vec{v} = (-2, 5, 1)$. Montrer que $\mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{b}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

→ Correction

Corrections fiche 3 : Espaces Vectoriels

Exercice 1.

Rappel 1. Espaces vectoriels :
Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ est un corps comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un ensemble E muni de deux lois

- $+_E : E \times E \to E$ appelée “addition” ou “loi interne”, $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} +_E \vec{v}$
- $\cdot_E : \mathbb{K} \times E \to E$ appelée “multiplication par un scalaire”, ou “loi externe”, $(\lambda, \vec{u}) \mapsto \lambda \cdot_E \vec{u}$

qui satisfont aux axiomes suivants :

(A1) La loi $+_E$ est associative : $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$, $(\vec{u} +_E \vec{v}) +_E \vec{w} = \vec{u} +_E (\vec{v} +_E \vec{w})$.

(A2) La loi $+_E$ est commutative : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$, $\vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u}$.

(A3) La loi $+_E$ admet un élément neutre (à gauche et à droite) :

$$\exists \vec{n} \in E \mid \forall \vec{u} \in E, \quad \vec{u} +_E \vec{n} = \vec{u} = \vec{n} +_E \vec{u}.$$

(A4) Tout élément de E a un opposé pour la loi $+_E$: $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E \mid \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{n}$.
(Autrement dit, $+_E$ est une loi de groupe commutatif sur E.)

(M1) La loi $\cdot_E$ est associative : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, \lambda \cdot_E (\mu \cdot_E \vec{u}) = (\lambda \times \mu) \cdot_E \vec{u}$.

(M2) La multiplication par l'unité $1_{\mathbb{K}}$ du corps est l'identité de E : $\forall \vec{u} \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot_E \vec{u} = \vec{u}$.

et enfin

(MA1) La loi $\cdot_E$ est distributive par rapport à l'addition $+_E$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \lambda \cdot_E (\vec{u} +_E \vec{v}) = \lambda \cdot_E \vec{u} +_E \lambda \cdot_E \vec{v}.$$

(MA2) Une autre forme de “distributivité” :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{u} \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot_E \vec{u} = \lambda \cdot_E \vec{u} +_E \mu \cdot_E \vec{u}.$$

Les éléments de E sont alors appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ des **scalaires**.

Sous-espaces vectoriels :

- Un sous-ensemble W d'un espace vectoriel E est appelé **sous-espace vectoriel** de E si W est lui-même un espace vectoriel avec les mêmes scalaires, addition et multiplication par un scalaire que E.
- **Théorème (Critère de sous-espace) :** Soient E un espace vectoriel et W un sous-ensemble non vide de E. Alors W est un sous-espace de E si et seulement si :
  (a) Si $\vec{u}, \vec{v} \in W$, alors $\vec{u} +_E \vec{v} \in W$ (Stabilité par addition)
  (b) Si $\vec{u} \in W$ et $c \in \mathbb{K}$, alors $c\vec{u} \in W$ (Stabilité par multiplication scalaire)

Quelques propriétés des espaces vectoriels :

- L'intesection $\cap_{i \in I} W_i$ d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels $\{W_i\}_{i \in I}$ d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.
- L'union de deux sous-espaces vectoriels W_1 et W_2 d'un espace vectoriel E n'est pas forcément un sous-espace vectoriel de E.
- Étant donné des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ dans un espace vectoriel E, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs, noté $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ ou $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$, est un sous-espace vectoriel de E.

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations définies dans l'énoncé n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car la propriété de distributivité de l'addition de scalaires n'est pas vérifiée. En effet, pour $\lambda = 2$, $\mu = 3$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(\lambda + \mu) \cdot (x, y) = 5 \cdot (x, y) = (5x, \frac{1}{5}y),$$

mais

$$\lambda \cdot (x, y) + \mu \cdot (x, y) = (2x, \frac{1}{2}y) + (3x, \frac{1}{3}y) = (5x, \frac{5}{6}y).$$

Cela montre que $(\lambda + \mu) \cdot (x, y) \neq \lambda \cdot (x, y) + \mu \cdot (x, y)$.

Exercice 2.

(2.1) L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations définies en (2.1) n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car la propriété de distributivité de la multiplication scalaire par rapport à l'addition n'est pas vérifiée. En effet, pour $\lambda = 2$, $\mu = 3$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(\lambda + \mu) \cdot (a, b) = 5 \cdot (a, b) = (a, 5b),$$

mais

$$\lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b) = (a, 2b) + (a, 3b) = (2a, 5b).$$

Cela montre que $(\lambda + \mu) \cdot (a, b) \neq \lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b)$.

(2.2) L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations définies en (2.2) n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car la propriété de distributivité de la multiplication scalaire par rapport à l'addition n'est pas vérifiée. En effet, pour $\lambda = 2$, $\mu = 3$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(\lambda + \mu) \cdot (a, b) = 5 \cdot (a, b) = (25a, 25b),$$

mais

$$\lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b) = (4a, 4b) + (9a, 9b) = (13a, 13b).$$

Cela montre que $(\lambda + \mu) \cdot (a, b) \neq \lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b)$.

(2.3) L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations définies en (2.3) n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car la propriété de l'existence du vecteur nul n'est pas vérifiée. En effet, s'il existait un vecteur nul $(0, 0)$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on ait $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$, alors on aurait (par la définition) $(a, b) = (0, 0)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, ce qui est absurde.

(2.4) L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations définies en (2.4) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car toutes les propriétés d'un espace vectoriel sont vérifiées. Cela découle du fait que les opérations sont les opérations usuelles de $\mathbb{R}^2$. La vérification de chaque propriété est laissée en exercice au lecteur.

Exercice 3.

Calculons d'abord le vecteur $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} \\
&= (0, 2, -2, 1) + 3(1, 3, 1, -1) - 2(-3, 0, 4, 2) \\
&= (0, 2, -2, 1) + (3, 9, 3, -3) + (6, 0, -8, -4) \\
&= (0 + 3 + 6, 2 + 9 + 0, -2 + 3 - 8, 1 - 3 - 4) \\
&= (9, 11, -7, -6).
\end{aligned}$$

Maintenant, calculons le vecteur $\vec{w}$:

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= 5(2\vec{a} - 3\vec{c}) + 2(-\vec{b} - 3\vec{a}) + (5\vec{b} + 12\vec{c}) \\
&= 10\vec{a} - 15\vec{c} - 2\vec{b} - 6\vec{a} + 5\vec{b} + 12\vec{c} \\
&= 4\vec{a} + 3\vec{b} - 3\vec{c} \\
&= 4(0, 2, -2, 1) + 3(1, 3, 1, -1) - 3(-3, 0, 4, 2) \\
&= (0, 8, -8, 4) + (3, 9, 3, -3) + (9, 0, -12, -6) \\
&= (0 + 3 + 9, 8 + 9 + 0, -8 + 3 - 12, 4 - 3 - 6) \\
&= (12, 17, -17, -5).
\end{aligned}$$

Exercice 4.
On cherche des réels x et y tels que :

$$x(1,0,2,4) + y(0,1,9,2) = (-4,2,10,-12).$$

Cela revient à l'égalité des composantes :

$$(x, y, 2x+9y, 4x+2y) = (-4,2,10,-12).$$

Ce qui donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ 2x + 9y = 10 \\ 4x + 2y = -12 \end{cases}$$

En remplaçant x et y dans les deux dernières équations, on obtient :

$$\begin{cases} 2(-4) + 9(2) = -8 + 18 = 10 \\ 4(-4) + 2(2) = -16 + 4 = -12 \end{cases}$$

Ce qui est vrai. Donc, les valeurs $x = -4$ et $y = 2$ satisfont l'équation donnée. Ainsi, on a :

$$-4\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{c}.$$

Exercice 5.
Dans cet exercice, nous allons nous servir du théorème de critère de sous-espace vectoriel (voir Rappel 1) pour déterminer si chaque ensemble V_i est un sous-espace vectoriel de V.

(5.1) L'ensemble $V_1 = \mathbb{Q}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $V = \mathbb{R}$ car il n'est pas stable par multiplication scalaire. Par exemple, si l'on prend le scalaire $\lambda = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et le vecteur $q = 1 \in \mathbb{Q}$, on a $\lambda q = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(5.2) L'ensemble $V_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $V = \mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par multiplication scalaire. Par exemple, si l'on prend le scalaire $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ et le vecteur $(2,1) \in V_2$, on a $\lambda \cdot (2,1) = (1, \frac{1}{2}) \notin V_2$ car $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

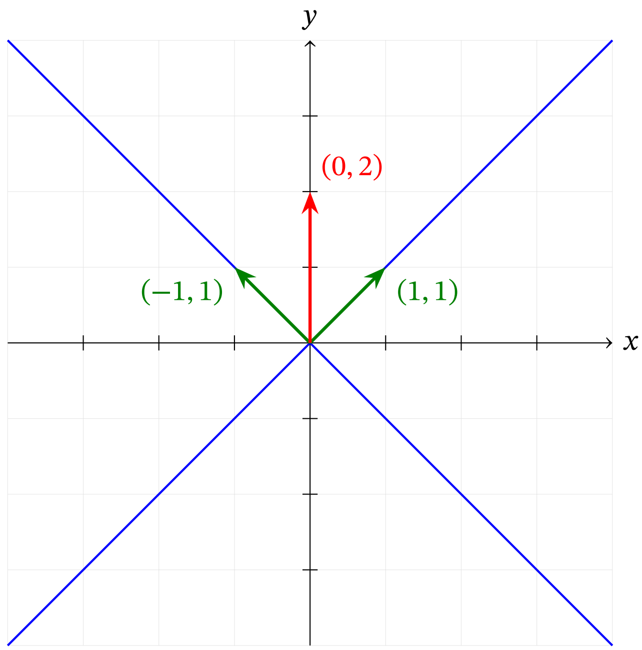
(5.3) L'ensemble $V_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de $V = \mathbb{R}^3$ car il est bien sûr non vide et stable par addition et par multiplication scalaire. En effet, pour tous $(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0) \in V_3$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in V_3,$$

et

$$\lambda \cdot (x_1, y_1, 0) = (\lambda x_1, \lambda y_1, 0) \in V_3.$$

(5.4) L'ensemble $V_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $V = \mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par addition. Par exemple, si l'on prend les vecteurs $(1,1)$ et $(-1,1)$. On note qu'ils appartient à V_4 car $1^2 = 1^2$ et $(-1)^2 = 1^2$. Mais leur somme est $(0,2)$ qui n'appartient pas à V_4 car $0^2 \neq 2^2$.



(5.5) L'ensemble $V_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $V = \mathbb{R}^2$ car il est non vide, par exemple $(0,0) \in V_5$, et il est stable par addition et par multiplication scalaire. En effet, pour tous $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in V_5$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

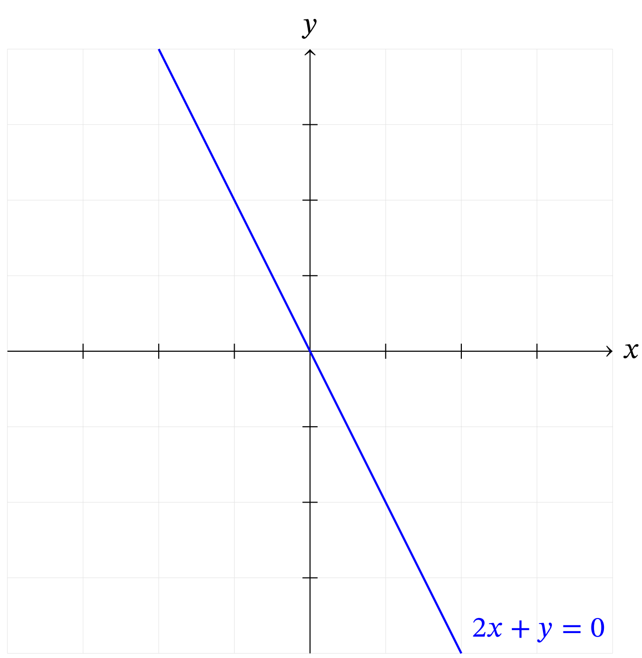
$$2x_1 + y_1 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_2 + y_2 = 0,$$

donc la somme $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ vérifie l'équation aussi car

$$2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0.$$

De même, pour la multiplication scalaire, on a :

$$2(\lambda x_1) + (\lambda y_1) = \lambda(2x_1 + y_1) = \lambda \cdot 0 = 0.$$



(5.6) L'ensemble $V_6 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \text{ et } x + z + t = 0\} \neq \emptyset$ (il est non vide car par exemple $(0,0,0,0) \in V_6$) est un sous-espace vectoriel de $V = \mathbb{R}^4$ car il est stable par addition et par multiplication scalaire. En effet, pour tous $(x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2) \in V_6$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$x_1 - y_1 = 0, \quad x_1 + z_1 + t_1 = 0,$$

$$x_2 - y_2 = 0, \quad x_2 + z_2 + t_2 = 0,$$

donc la somme $(x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$ vérifie les équations aussi car

$$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = 0 + 0 = 0,$$

$$(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2) + (t_1 + t_2) = (x_1 + z_1 + t_1) + (x_2 + z_2 + t_2) = 0 + 0 = 0.$$

De même, pour la multiplication scalaire, on a :

$$\lambda x_1 - \lambda y_1 = \lambda(x_1 - y_1) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

$$\lambda x_1 + \lambda z_1 + \lambda t_1 = \lambda(x_1 + z_1 + t_1) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Exercice 6.

> **Rappel 2.** L'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est muni des opérations suivantes : pour tous $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,
>
> $$\begin{array}{rccl} f+g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) +_{\mathbb{R}} g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \lambda \cdot f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \lambda \cdot_{\mathbb{R}} f(x) \end{array}$$

(6.1) L'ensemble $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car il est non vide (par exemple il contient l'application constante 0) et il est stable par addition et par multiplication scalaire. En effet, pour tous $f, g \in F_1$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0,$$

et

$$(\lambda \cdot f)(1) = \lambda f(1) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Ainsi, $f + g \in F_1$ et $\lambda \cdot f \in F_1$.

(6.2) L'ensemble $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car il n'est pas stable par addition. Par exemple, si l'on prend les fonctions constantes $f(x) = 1$ et $g(x) = 1$. On note qu'elles appartiennent à F_2 car $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$. Mais leur somme est la fonction constante $h(x) = 2$ qui n'appartient pas à F_2 car $h(0) = 2 \neq 1$.

(6.3) L'ensemble $F_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante}\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car il n'est pas stable par multiplication scalaire. Par exemple, si l'on prend la fonction $f(x) = x$ qui appartient à F_3 car elle est croissante. Mais pour le scalaire $\lambda = -1$, la fonction $g(x) = -f(x) = -x$ n'appartient pas à F_3 car elle est décroissante.

(6.4) L'ensemble $F_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(-x) = -f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car il est stable par addition et par multiplication scalaire. En effet, pour tous $f, g \in F_4$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -(f + g)(x),$$

et

$$(\lambda \cdot f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda(-f(x)) = -(\lambda f(x)) = -(\lambda \cdot f)(x).$$

Ainsi, $f + g \in F_4$ et $\lambda \cdot f \in F_4$.

Exercice 7.

(7.1) L'ensemble $F_1 = \{P \in E \mid P(X-1) = P'(X^2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}[X]$ car il est stable par addition et par multiplication scalaire. En effet, pour tous $P, Q \in F_1$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(P+Q)(X-1) = P(X-1) + Q(X-1) = P'(X^2) + Q'(X^2) = (P+Q)'(X^2),$$

où la dernière égalité découle de la linéarité de l'opération de dérivation. De même,

$$(\lambda \cdot P)(X-1) = \lambda P(X-1) = \lambda P'(X^2) = (\lambda \cdot P)'(X^2).$$

Ainsi, $P + Q \in F_1$ et $\lambda \cdot P \in F_1$.

(7.2) L'ensemble $F_2 = \{P \in E \mid P(-1) = 5\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car il n'est pas stable par addition. Par exemple, si l'on prend les polynômes constants $P(X) = 5$ et $Q(X) = 5$. On note qu'ils appartiennent à F_2 car $P(-1) = 5$ et $Q(-1) = 5$. Mais leur somme est le polynôme constant $R(X) = 10$ qui n'appartient pas à F_2 car $R(-1) = 10 \neq 5$.

(7.3) L'ensemble $F_3 = \{P \in E \mid P = 0 \text{ ou } P \text{ est de degré impair}\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car il n'est pas stable par addition. Par exemple, si l'on considère $P(X) = X^3 + X^2$ et $Q(X) = -X^3$. On note que P et Q appartiennent à F_3 car P et Q sont de degré impair. Mais leur somme est le polynôme $(P+Q)(X) = X^3 + X^2 - X^3 = X^2$ qui n'appartient pas à F_3 car il est de degré pair et il n'est pas nul.

(7.4) L'ensemble $F_4 = \{P \in E \mid \deg P \leq n\}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car il est stable par addition et par multiplication scalaire. En effet, pour tous $P, Q \in F_4$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q) \leq n,$$

et

$$\deg(\lambda \cdot P) = \begin{cases} \deg P & \text{si} \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{si} \lambda = 0 \end{cases}$$

Dand les deux cas on a que $\deg(\lambda \cdot P) \leq n$. Ainsi, $P + Q \in F_4$ et $\lambda \cdot P \in F_4$.

Exercice 8.

(8.1) On va montrer que $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. En effet, soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition de $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$, il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{a}_p,$$

$$\vec{v} = \beta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \beta_p \vec{a}_p,$$

donc

$$\vec{u} + \vec{v} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{a}_1 + \cdots + (\alpha_p + \beta_p)\vec{a}_p \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\},$$

et

$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda\alpha_1)\vec{a}_1 + \cdots + (\lambda\alpha_p)\vec{a}_p \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}.$$

Ainsi, $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ est stable par addition et par multiplication scalaire (il est clair que $0 \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$), ce qui montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(8.2) Supposons que $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\} \cap \mathrm{Vec}\{\vec{b}\}$ n'est pas nul. Cela signifie qu'il existe un vecteur non nul $\vec{v}$ tel que $\vec{v} \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ et $\vec{v} \in \mathrm{Vec}\{\vec{b}\}$. Par définition de $\mathrm{Vec}\{\vec{b}\}$, il existe un scalaire $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \mu\vec{b}$. Comme $\vec{v}$ est non nul, on a $\mu \neq 0$. On peut donc écrire :

$$\vec{b} = \frac{1}{\mu}\vec{v}.$$

Comme $\vec{v} \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ et que $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ est un sous-espace vectoriel (comme montré en (8.1)), il en résulte que $\vec{b} \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$. Par conséquent, tout vecteur de la forme $\lambda\vec{b}$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$) appartient également à $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$. Ainsi, on a montré que $\mathrm{Vec}\{\vec{b}\} \subset \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$.

Exercice 9.

(9.1) L'affirmation est fausse. On procède par contradiction. Supposons qu'il existe des scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x).$$

En évaluant cette équation en $x = 0$, on obtient :

$$e^0 = \alpha \sin(0) + \beta \cos(0) \implies 1 = 0 + \beta \cdot 1 \implies \beta = 1.$$

De plus, en prenant la dérivée de chaque côté, on a :

$$e^x = \alpha \cos(x) - \beta \sin(x).$$

En évaluant cette équation en $x = 0$, on obtient :

$$e^0 = \alpha \cos(0) - \beta \sin(0) \implies 1 = \alpha \cdot 1 - 1 \cdot 0 \implies \alpha = 1.$$

Ainsi, on a que $e^x = \sin(x) + \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cependant, cette égalité n'est pas vraie pour tous les $x \in \mathbb{R}$. Par exemple, en évaluant en $x = \pi$, on obtient :

$$e^\pi = \sin(\pi) + \cos(\pi) \implies e^\pi = 0 - 1 \implies e^\pi = -1,$$

ce qui est faux car $e^\pi > 0$. Par conséquent, l'affirmation est fausse.

(9.2) L'affirmation est vraie. En effet, l'ensemble des fonctions tendant vers 0 en $+\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient f et g deux fonctions qui tendent vers 0 en $+\infty$, et soit λ un scalaire réel. Alors :

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 + 0 = 0,$$

où la première égalité découle de la propriété de la limite de la somme de deux fonctions, notons que cela est valable car les deux limites existent et sont finies. De même, par la propriété de la limite du produit d'une fonction par un scalaire, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} (\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Cela montre que l'ensemble est stable par addition et par multiplication scalaire.

(9.3) L'affirmation est fausse. En effet, considérons les fonctions constantes $f(x) = 1$ et $g(x) = 1$. On note qu'elles appartiennent à l'ensemble des fonctions tendant vers 1 en $+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Cependant, leur somme est la fonction constante $h(x) = 2$, qui n'appartient pas à cet ensemble car $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 2 \neq 1$. Ainsi, l'ensemble n'est pas stable par addition, ce qui montre que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 10.

(10.1) On va montrer que E, F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition de E, il existe des réels $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ tels que :

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \text{ avec } x_1 + y_1 = 0 \text{ et } y_1 + z_1 = 0,$$

$$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \text{ avec } x_2 + y_2 = 0 \text{ et } y_2 + z_2 = 0.$$

Donc,

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

où

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0,$$

et

$$(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0.$$

Ainsi, $\vec{u} + \vec{v} \in E$. De plus,

$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1),$$

où

$$(\lambda x_1) + (\lambda y_1) = \lambda(x_1 + y_1) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

et

$$(\lambda y_1) + (\lambda z_1) = \lambda(y_1 + z_1) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Ainsi, $\lambda \cdot \vec{u} \in E$. Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De manière similaire, on peut montrer que F, G et H sont également des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

> **Exercice complémentaire 1.** Finir la démonstration pour F, G et H.

(10.2) On va déterminer $E \cap F$, $E \cap G$ et $E \cap H$. Pour trouver $E \cap F$, on cherche les vecteurs (x, y, z) qui satisfont les conditions de E et de F simultanément. Ainsi, on a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

On va utiliser la méthode du pivot de Gauss pour résoudre ce système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est donc équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

On pose $z = t$ avec $t \in \mathbb{R}$ et on trouve que $x = t$ et $y = -t$. Ainsi, on a :

$$E \cap F = \{(t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vec}(1, -1, 1).$$

De même, pour $E \cap G$, on a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

On peut encore une fois utiliser la méthode du pivot de Gauss pour résoudre ce système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

On trouve ainsi que $E \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. Enfin, pour $E \cap H$, on cherche les vecteurs (x, y, z) tels que :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

et

$$(x, y, z) = (a + c, a - c, 2a + b + 3c) \text{ pour certains } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

En substituant les expressions de x, y et z dans les équations de E, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases}(a+c)+(a-c)=0\\(a-c)+(2a+b+3c)=0\end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases}2a=0\\3a+b+2c=0\end{cases}$$

On trouve ainsi que $a=0$ et $b=-2c$. En substituant ces valeurs dans l'expression de (x,y,z), on obtient :

$$(x,y,z)=(c,-c,c) \text{ pour } c\in\mathbb{R}.$$

Ainsi, on a :

$$E\cap H=\{(c,-c,c)\mid c\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vec}(1,-1,1).$$

(10.3) On va déterminer si les ensembles $E\cup F$ et $E\cup G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Considérons d'abord $E\cup F$. Soient $\vec{u},\vec{v}\in E\cup F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Il y a plusieurs cas à considérer :

— Si $\vec{u},\vec{v}\in E$, alors $\vec{u}+\vec{v}\in E\subset E\cup F$ et $\lambda\cdot\vec{u}\in E\subset E\cup F$.

— Si $\vec{u},\vec{v}\in F$, alors $\vec{u}+\vec{v}\in F\subset E\cup F$ et $\lambda\cdot\vec{u}\in F\subset E\cup F$.

— Si $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\in E$ et $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\in F$, alors :

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3).$$

On note que $\vec{u}+\vec{v}$ appartient à F car :

$$\begin{aligned}(u_1+v_1)+2(u_2+v_2)+(u_3+v_3)&=(u_1+u_2)+(u_2+u_3)+v_1+2v_2+v_3\\&=0+0+0\\&=0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\vec{u}+\vec{v}\in F\subset E\cup F$. Le cas $\vec{u}\in F$ et $\vec{v}\in E$ est similaire. On en déduit que $E\cup F$ est stable par addition et par multiplication scalaire, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Considérons maintenant $E\cup G$. Dans ce cas, on peut trouver un contre-exemple pour montrer que $E\cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soient $\vec{u}=(1,-1,1)\in E$ et $\vec{v}=(1,-1,0)\in G$. Il est facile de vérifier que $\vec{u}\in E$ car $1+(-1)=0$ et $-1+1=0$. De même, $\vec{v}\in G$ car $1+(-1)+0=0$. Cependant, leur somme est :

$$\vec{u}+\vec{v}=(2,-2,1).$$

On note que $\vec{u}+\vec{v}\notin E$ car $2+(-2)=0$ mais $-2+1\neq 0$. De plus, $\vec{u}+\vec{v}\notin G$ car $2+(-2)+1=1\neq 0$. Ainsi, $\vec{u}+\vec{v}\notin E\cup G$. Par conséquent, $E\cup G$ n'est pas stable par addition, donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11.

(11.1) On va montrer que $V_1\cap V_2$ et V_1+V_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Soient $\vec{u},\vec{v}\in V_1\cap V_2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Par définition de l'intersection, on a $\vec{u},\vec{v}\in V_1$ et $\vec{u},\vec{v}\in V_2$. Comme V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels, on a :

$$\vec{u}+\vec{v}\in V_1 \text{ et } \vec{u}+\vec{v}\in V_2,$$

donc $\vec{u}+\vec{v}\in V_1\cap V_2$. De plus,

$$\lambda\cdot\vec{u}\in V_1 \text{ et } \lambda\cdot\vec{u}\in V_2,$$

donc $\lambda\cdot\vec{u}\in V_1\cap V_2$. Ainsi, $V_1\cap V_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Maintenant, soient $\vec{u},\vec{v}\in V_1+V_2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Par définition de la somme, il existe des vecteurs $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{v}_1,\vec{v}_2$ tels que :

$$\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2,\ \text{avec } \vec{u}_1\in V_1,\vec{u}_2\in V_2,$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \text{ avec } \vec{v}_1 \in V_1, \vec{v}_2 \in V_2.$$

Donc,

$$\vec{u} + \vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{v}_2),$$

où $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 \in V_1$ et $\vec{u}_2 + \vec{v}_2 \in V_2$ car V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels. Ainsi, $\vec{u} + \vec{v} \in V_1 + V_2$. De plus,

$$\lambda \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}_1 + \lambda \cdot \vec{u}_2,$$

où $\lambda \cdot \vec{u}_1 \in V_1$ et $\lambda \cdot \vec{u}_2 \in V_2$ car V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels. Ainsi, $\lambda \cdot \vec{u} \in V_1 + V_2$. Par conséquent, $V_1 + V_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(11.2) On va montrer que $V_1 \cup V_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$. Supposons d'abord que $V_1 \cup V_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et sans perte de généralité, supposons que $V_2 \not\subset V_1$. On va alors montrer que $V_1 \subset V_2$. Soit $\vec{v} \in V_1$. Comme $V_2 \not\subset V_1$, il existe un vecteur $\vec{u} \in V_2$ tel que $\vec{u} \notin V_1$. Comme $\vec{v} \in V_1$ et $\vec{u} \in V_2$, leur somme $\vec{v} + \vec{u} \in V_1 \cup V_2$. Cependant, $\vec{v} + \vec{u} \notin V_1$ car sinon, on aurait $\vec{u} = (\vec{v} + \vec{u}) - \vec{v} \in V_1$, ce qui contredit notre choix de $\vec{u}$. Ainsi, $\vec{v} + \vec{u} \in V_2$. Comme V_2 est un sous-espace vectoriel, on a :

$$\vec{v} = \underbrace{(\vec{v} + \vec{u})}_{\in V_2} - \underbrace{\vec{u}}_{\in V_2} \in V_2.$$

Cela montre que $V_1 \subset V_2$. La réciproque est évidente : si $V_1 \subset V_2$, alors $V_1 \cup V_2 = V_2$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. De même, si $V_2 \subset V_1$, alors $V_1 \cup V_2 = V_1$, qui est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, on conclut que $V_1 \cup V_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$.

(11.3) On va montrer que si $V_1 \neq \mathbb{R}^n$ et $V_2 \neq \mathbb{R}^n$, alors $V_1 \cup V_2 \neq \mathbb{R}^n$. Supposons par l'absurde que $V_1 \cup V_2 = \mathbb{R}^n$. Alors, $V_1 \cup V_2 = \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (Oui ! Il est evident que $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de lui-même). D'après (11.2), cela implique que $V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$. Supposons sans perte de généralité que $V_1 \subset V_2$ (le cas $V_2 \subset V_1$ est similaire). Alors, on a $V_2 = V_1 \cup V_2 = \mathbb{R}^n$, ce qui contredit l'hypothèse que $V_2 \neq \mathbb{R}^n$. Ainsi, notre supposition initiale est fausse, et on conclut que si $V_1 \neq \mathbb{R}^n$ et $V_2 \neq \mathbb{R}^n$, alors $V_1 \cup V_2 \neq \mathbb{R}^n$.

Exercice 12.

(12.1) L'affirmation est fausse. En effet, considérons les vecteurs $\vec{a} = (1, 0)$ et $\vec{b} = (0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\mathrm{Vec}\{\vec{a}\} = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathrm{Vec}\{\vec{b}\} = \{(0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

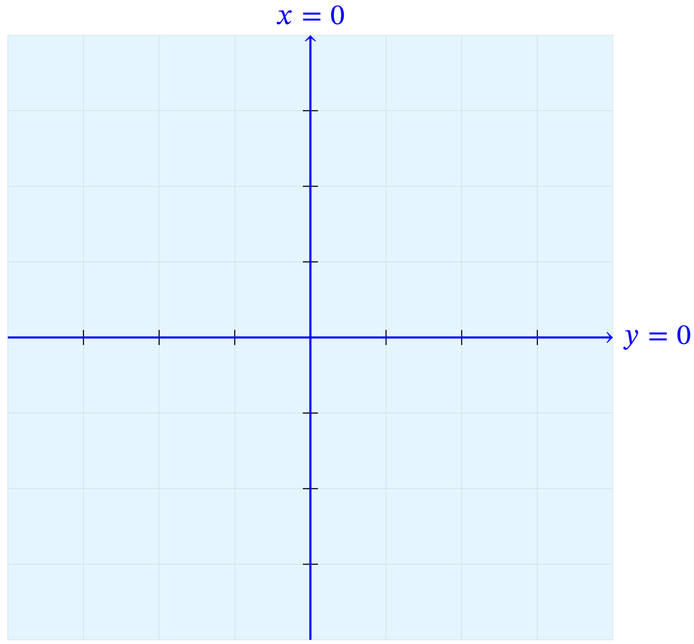
Donc,

$$\mathrm{Vec}\{\vec{a}\} \cup \mathrm{Vec}\{\vec{b}\} = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

tandis que

$$\mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{b}\} = \mathbb{R}^2.$$

Cela montre que $\mathrm{Vec}\{\vec{a}\} \cup \mathrm{Vec}\{\vec{b}\} \neq \mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{b}\}$. Ci-dessous une figure illustrant cette situation. Le deux axes représentent respectivement $\mathrm{Vec}\{\vec{a}\}$ et $\mathrm{Vec}\{\vec{b}\}$, tandis que le plan entier représente $\mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.



(12.2) L'affirmation est vraie. En effet, si $\vec{a}_p \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{p-1}\}$, alors il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\vec{a}_p = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_{p-1}\vec{a}_{p-1}.$$

Donc, si $\vec{v} \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$, alors il existe des scalaires $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\vec{v} = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \dots + \beta_{p-1}\vec{a}_{p-1} + \beta_p\vec{a}_p.$$

En substituant l'expression de $\vec{a}_p$ dans celle de $\vec{v}$, on obtient :

$$\vec{v} = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \dots + \beta_{p-1}\vec{a}_{p-1} + \beta_p(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_{p-1}\vec{a}_{p-1}).$$

Cela peut être réarrangé comme suit :

$$\vec{v} = (\beta_1 + \beta_p\alpha_1)\vec{a}_1 + (\beta_2 + \beta_p\alpha_2)\vec{a}_2 + \dots + (\beta_{p-1} + \beta_p\alpha_{p-1})\vec{a}_{p-1}.$$

Cela montre que $\vec{v} \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{p-1}\}$. Ainsi, on a $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\} \subset \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{p-1}\}$. L'inclusion inverse est évidente, donc on conclut que $\mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\} = \mathrm{Vec}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{p-1}\}$.

(12.3) L'affirmation est fausse. En effet, considérons les vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$, et le vecteurs $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (2, 2)$ et $\vec{c} = (3, 3)$ dans $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\mathrm{Vec}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \mathbb{R}^2,$$

mais

$$\mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{a}\},$$

car $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont des multiples scalaires de $\vec{a}$. Ainsi, on a $\mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subset \mathrm{Vec}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, mais $3 \nleq 2$. Cela montre que l'affirmation est fausse.

Exercice 13.
Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\beta \neq 0$ et $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (0, \dots, 0)$. On va montrer que $\mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{c}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{b}, \vec{c}\}$. Commençons par montrer que $\mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{c}\} \subset \mathrm{Vec}\{\vec{b}, \vec{c}\}$. Soit $\vec{v} \in \mathrm{Vec}\{\vec{a}, \vec{c}\}$. Par définition de Vec, il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{c}.$$

En utilisant l'équation donnée (à noter que $\alpha \neq 0$ car $\alpha\beta \neq 0$ et de même pour β), on peut exprimer $\vec{a}$ en fonction de $\vec{b}$ et $\vec{c}$:

$$\alpha\vec{a} = -\beta\vec{b} - \gamma\vec{c} \implies \vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{c}.$$

En substituant cette expression dans celle de $\vec{v}$, on obtient :

$$\vec{v} = \lambda_1\left(-\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{c}\right) + \lambda_2\vec{c} = -\frac{\lambda_1\beta}{\alpha}\vec{b} + \left(-\frac{\lambda_1\gamma}{\alpha} + \lambda_2\right)\vec{c}.$$

Cela montre que $\vec{v} \in \mathrm{Vec}\{\vec{b},\vec{c}\}$. Ainsi, on a $\mathrm{Vec}\{\vec{a},\vec{c}\} \subset \mathrm{Vec}\{\vec{b},\vec{c}\}$. De manière similaire, on peut montrer que $\mathrm{Vec}\{\vec{b},\vec{c}\} \subset \mathrm{Vec}\{\vec{a},\vec{c}\}$. Soit $\vec{w} \in \mathrm{Vec}\{\vec{b},\vec{c}\}$. Par définition de Vec, il existe des scalaires $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\vec{w} = \mu_1\vec{b} + \mu_2\vec{c}.$$

En utilisant l'équation donnée, on peut exprimer $\vec{b}$ en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{c}$:

$$\beta\vec{b} = -\alpha\vec{a} - \gamma\vec{c} \implies \vec{b} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{a} - \frac{\gamma}{\beta}\vec{c}.$$

En substituant cette expression dans celle de $\vec{w}$, on obtient :

$$\vec{w} = \mu_1\left(-\frac{\alpha}{\beta}\vec{a} - \frac{\gamma}{\beta}\vec{c}\right) + \mu_2\vec{c} = -\frac{\mu_1\alpha}{\beta}\vec{a} + \left(-\frac{\mu_1\gamma}{\beta} + \mu_2\right)\vec{c}.$$

Cela montre que $\vec{w} \in \mathrm{Vec}\{\vec{a},\vec{c}\}$. Ainsi, on a $\mathrm{Vec}\{\vec{b},\vec{c}\} \subset \mathrm{Vec}\{\vec{a},\vec{c}\}$. En combinant les deux inclusions, on conclut que $\mathrm{Vec}\{\vec{a},\vec{c}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{b},\vec{c}\}$.

Exercice 14.

(14.1) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x,1,2) \in \mathrm{Vec}\{\vec{a},\vec{b}\}$. Par définition de Vec, cela signifie qu'on cherche des scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$(x,1,2) = \alpha(-1,2,1) + \beta(0,1,-1).$$

Cela équivaut au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ 1 = 2\alpha + \beta \\ 2 = \alpha - \beta \end{cases}$$

On peut résoudre ce système en substituant la première équation dans les deux autres. En substituant $\alpha = -x$ dans la deuxième équation, on obtient :

$$1 = 2(-x) + \beta \implies \beta = 1 + 2x.$$

En substituant $\alpha = -x$ dans la troisième équation, on obtient :

$$2 = -x - \beta.$$

En substituant l'expression de β trouvée précédemment, on a :

$$2 = -x - (1 + 2x) \implies 2 = -3x - 1 \implies 3 = -3x \implies x = -1.$$

Ainsi, la valeur de x pour que $(x,1,2) \in \mathrm{Vec}\{\vec{a},\vec{b}\}$ est $x = -1$.

(14.2) On va s'en servir de l'Exercice 13 deux fois pour montrer que $\mathrm{Vec}\{\vec{a},\vec{b}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{u},\vec{b}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{u},\vec{v}\}$. Premièrement, on va montrer que $\mathrm{Vec}\{\vec{a},\vec{b}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{u},\vec{b}\}$. On cherche des scalaires $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\beta \neq 0$ et

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{u} = (0,0,0).$$

Cela équivaut au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -\alpha + 0\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 0\gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

On va résoudre ce système en utilisant le pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3+L_1]{L_2 \leftarrow L_2+2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3+L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On choisit γ comme paramètre libre, et on trouve :

$$\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -2\gamma \end{cases}$$

En choisissant $\gamma = 1$, on obtient $\alpha = 1$ et $\beta = -2$, ce qui satisfait la condition $\alpha\beta \neq 0$. On vérifie que en effet :

$$1 \cdot \underbrace{(-1,2,1)}_{\vec{a}} + (-2) \cdot \underbrace{(0,1,-1)}_{\vec{b}} + 1 \cdot \underbrace{(1,0,-3)}_{\vec{u}} = (0,0,0).$$

Par l'Exercice 13, on a donc $\mathrm{Vec}\{\vec{a},\vec{b}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{u},\vec{b}\}$. Maintenant, on va montrer que $\mathrm{Vec}\{\vec{u},\vec{b}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{u},\vec{v}\}$. On cherche des scalaires $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\beta \neq 0$ et

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{v} = (0,0,0).$$

Cela équivaut au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \alpha + 0\beta - 2\gamma = 0 \\ 0\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ -3\alpha - \beta + 1\gamma = 0 \end{cases}$$

On va résoudre ce système en utilisant le pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3+3L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3+L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On choisit γ comme paramètre libre, et on trouve :

$$\begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \beta = -5\gamma \end{cases}$$

En choisissant $\gamma = 1$, on obtient $\alpha = 2$ et $\beta = -5$, ce qui satisfait la condition $\alpha\beta \neq 0$. On vérifie que en effet :

$$2 \cdot \underbrace{(1,0,-3)}_{\vec{u}} + (-5) \cdot \underbrace{(0,1,-1)}_{\vec{b}} + 1 \cdot \underbrace{(-2,5,1)}_{\vec{v}} = (0,0,0).$$

Par l'Exercice 13, on a donc $\mathrm{Vec}\{\vec{u},\vec{b}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{u},\vec{v}\}$. En combinant les deux égalités, on conclut que $\mathrm{Vec}\{\vec{a},\vec{b}\} = \mathrm{Vec}\{\vec{u},\vec{v}\}$.