

ALGÈBRE LINÉAIRE

FICHE 4 : BASE - DIMENSION - SOMME DIRECTE

Exercice 1. Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel V sur \mathbb{R} .

Écrire avec des quantificateurs les affirmations suivantes :

- (1) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ engendrent V .
- (2) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ n'engendrent pas V .
- (3) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sont linéairement indépendants.
- (4) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ne sont pas linéairement indépendants, c'est-à-dire sont linéairement dépendants.

Exercice 2. Soient les vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants :

- (1) $\vec{u} = (1; -1; 2)$, $\vec{v} = (-1; 1; 1)$ et $\vec{w} = (3; -3; 3)$.
- (2) $\vec{u} = (2; 0; -1)$, $\vec{v} = (1; 3; 4)$ et $\vec{w} = (1; 1; 1)$.

Montrer que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont linéairement dépendants. Écrire dans chaque cas une relation liant ces trois vecteurs.

Exercice 3. Soit $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ une famille libre d'un espace vectoriel V ($n \geq 2$).

On considère les vecteurs $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ donnés comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 &= \vec{v}_1, \\ \vec{w}_2 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \\ &\vdots \\ \vec{w}_n &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n.\end{aligned}$$

Montrer que les vecteurs $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ sont linéairement indépendants.

Exercice 4. (Extrait du DS de Mars 2024)

Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on considère la famille $\mathcal{F} = \{f, g, h\}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos x, g(x) = x \sin x$ et $h(x) = x^2 \cos x$.

Montrer que la famille \mathcal{F} est libre dans E .

Exercice 5. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On considère les trois vecteurs de E :

$$\begin{array}{ccc} f_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & f_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & f_3 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x & x & \longmapsto & e^{2x} & x & \longmapsto & e^{3x} \end{array}$$

Montrer que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre. (On pourra considérer le comportement de la fonction exponentielle à l'infini.)

Exercice 6. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel V sur \mathbb{R} . Montrer que :

Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont linéairement indépendants, alors il en est de même pour $\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}$ et $\vec{u} + \vec{w}$.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 7. Montrer que les vecteurs $\vec{u} = (1; -1)$, $\vec{v} = (2; 1)$, $\vec{w} = (3; 2)$ engendrent \mathbb{R}^2 .
Exprimer le vecteur $(x; y)$ comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs.
Cette décomposition suivant les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est-elle unique?

Exercice 8. Soient les vecteurs de \mathbb{R}^4 suivants :

$\vec{u}_1 = (1; -2; 1; 2)$, $\vec{u}_2 = (1; -3; 1; 2)$, $\vec{u}_3 = (2; -4; 3; 4)$ et $\vec{u}_4 = (1; -1; 2; 3)$.

- (1) Montrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
- (2) Soit $\vec{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calculer les coordonnées de \vec{u} dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$.

Exercice 9. Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Rappeler quelle est la base canonique \mathcal{B}_c de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (2) Montrer que $\mathcal{B}' = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (3) Déterminer les coordonnées de la matrice $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B}' .

Exercice 10. Soient les vecteurs de \mathbb{R}^3 : $\vec{u} = (1; -1; 2)$ et $\vec{v} = (-1; 1; 1)$.

- (1) Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre dans \mathbb{R}^3 .
- (2) Compléter \mathcal{F} en une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 11. Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

- (1) Rappeler ce qu'est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, notée \mathcal{B}_c .
- (2) On considère les polynômes $A = 1 - X + X^2$ et $B = 1 + X + X^2$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
 - (a) Montrer que $\{A, B\}$ une famille libre dans $\mathbb{R}_3[X]$.
 - (b) Compléter la famille $\{A, B\}$ en une base \mathcal{B}' de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - (c) Déterminer les coordonnées du polynôme $P = -7X - 3X^2 - 8X^3$ dans la base \mathcal{B}' .

Exercice 12. Soient $n \geq 1$ un entier, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
Montrer que la famille $(1, X - 1, (X - 1)^2, \dots, (X - 1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 13. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0 \text{ et } z + t = 0\}$.

- (1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
- (2) Donner une base de E , puis la compléter en une base de \mathbb{R}^4 .
- (3) Les vecteurs $\vec{u}_1 = (1; 1; 2; -2)$, $\vec{u}_2 = (-1; 0; -1; 1)$ et $\vec{u}_3 = (-2; 1; -1; 1)$ forment-ils une famille génératrice de E ?

Exercice 14. Soient a, b, c trois réels. On considère l'ensemble

$$G = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}.$$

- (1) Démontrer que : si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de dimension 2, c'à d un plan vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- (2) Qu'en est-il si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$?

Exercice 15. (Extrait de l'Examen d'Avril 2024)

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels F et G définis comme suit :

$$F = \left\{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y - 7z - 2t = 0 \\ x + y - 4z + t = 0 \end{cases} \right\}$$

$$G = \text{Vec} \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2 \} \text{ avec } \vec{w}_1 = (3; 6; 1; -5) \text{ et } \vec{w}_2 = (4; -1; 2; 1).$$

- (1) Déterminer une base de F composée de vecteurs à coordonnées entières, puis préciser la dimension de F .
- (2) Donner une base de G , puis préciser la dimension de G .
- (3) Trouver une base de $F \cap G$. En déduire la dimension de $F \cap G$.
- (4) Calculer la dimension de $F + G$.
- (5) Déterminer une base de $F + G$. Détailler la méthode et justifier.
- (6) Compléter la base de $F + G$ trouvée à la question précédente en une base de \mathbb{R}^4 . Détailler la méthode.

Exercice 16. Soit \mathcal{S} l'ensemble des suites numériques $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On munit \mathcal{S} de l'opération interne $+$ et de l'opération externe \cdot comme suit:

$$\forall u, v \in \mathcal{S}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot u = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

- (1) Montrer que \mathcal{S} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
- (2) Soit \mathcal{F} l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définies par la relation de récurrence: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{S} .
 - (b) Soient $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que les suites $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à \mathcal{F} .
 - (c) Montrer que : pour tout $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(u_0, u_1) = \lambda(1, r) + \mu(1, s)$.
 - (d) En déduire que $((r^n)_{n \in \mathbb{N}}, (s^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de \mathcal{F} .

Exercice 17. Soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ une base d'un espace vectoriel V sur \mathbb{R} .

- (1) Montrer que l'ensemble $\{\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de V de dimension $n - 1$.
- (2) Soit $\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i$ un vecteur donné de V . Montrer que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ si et seulement si les vecteurs $\vec{v} - \vec{v}_1, \vec{v} - \vec{v}_2, \dots, \vec{v} - \vec{v}_n$ sont linéairement dépendants.

Exercice 18. Soient U, V deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimension $n - 1$.

Montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) \geq n - 2$.

Exercice 19. Soit $\mathbb{R}_3[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Pour $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, on désigne par $P'(X)$ son polynôme dérivé.

- (1) Montrer que les polynômes $P(X)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$ forment un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_3[X]$.
- (2) Montrer que $\mathcal{B} = \{(X - 1)^2, X(X - 1)^2\}$ est une base de F .
- (3) Compléter \mathcal{B} en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- (4) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 20. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Soit $\mathcal{P} = \{f \in E \mid f \text{ est paire}\}$ et $\mathcal{I} = \{f \in E \mid f \text{ est impaire}\}$.

Étant donné $f \in E$, on définit deux éléments f_p et f_i de E comme suit:

$$f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (1) Montrer que $f_p \in \mathcal{P}$ et $f_i \in \mathcal{I}$.
- (2) En déduire que $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.
- (3) Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercice 21. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Soient $F = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}$.

- (1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (2) Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 22. On considère dans $\mathbb{R}_3[X]$ les sous-espaces vectoriels

$$E = \{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \text{ et}$$

$$F = \text{Vec}\{1 - X - X^2, X - X^3, 1 + X^2 + X^3\}.$$

La somme $E + F$ est-elle directe? Si oui, E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 23. Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité.

Montrer qu'il existe un entier naturel p non nul, et des réels a_0, \dots, a_p non tous nuls tels que:

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_p A^p = \Theta, \text{ où } \Theta \text{ est la matrice nulle.}$$

Exercice 24. Soient D l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, et T l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de trace nulle.

- (1) Montrer que D et T sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (2) Montrer que la somme $D + T$ est directe.
- (3) Donner une base de D , T et $D \oplus T$.

Exercice 25. Soit E l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- (1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, puis donner une base de E .
- (2) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer une base de l'espace vectoriel $E \cap \text{Vec}\{A, B\}$, puis la compléter en une base de E .

Exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *triangulaire supérieure* si $A_{ij} = 0$ lorsque $i > j$ (c'est-à-dire, tous les coefficients situés sous la première diagonale sont nuls).

- (1) Montrer que l'ensemble T des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (2) Donner une base de T et $\dim_{\mathbb{R}} T$.
- (3) Montrer que si $A, B \in T$, alors $AB \in T$.

Exercice 27. Soient $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

La *transposée* de A est la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, qu'on note A^t , donnée par:

$$(A^t)_{ij} = A_{ji} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m.$$

Lorsque $n = m$, on dira que A est *symétrique* si $A^t = A$, et on dira que A est *antisymétrique* si $A^t = -A$.

- (1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer les propriétés suivantes:
 $(A + B)^t = A^t + B^t$, $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$ et $(A^t)^t = A$.
- (2) Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $(AB)^t = B^t A^t$.
- (3) Montrer que l'ensemble S des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une base de S pour $n = 3$.
- (4) Montrer que l'ensemble S' des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une base de S' pour $n = 3$.
- (5) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus S'$.