ALGÈBRE LINÉAIRE
FICHE DE TD 4 : FAMILLES GÉNÉRATRICES, BASES ET DIMENSION

Familles Génératrices, Bases et Dimension

Exercice 1. Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs les affirmations suivantes :

(1.1) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ engendrent V.

(1.2) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ n'engendrent pas V.

(1.3) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sont linéairement indépendants.

(1.4) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ne sont pas linéairement indépendants, c.-à-d. sont linéairement dépendants.

→ Correction

Exercice 2. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

(2.1) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ et $\vec{w} = (3, -3, 3)$.

(2.2) $\vec{u} = (2, 0, -1)$, $\vec{v} = (1, 3, 4)$ et $\vec{w} = (1, 1, 1)$.

Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont linéairement dépendants. Écrire dans chaque cas une relation liant ces trois vecteurs.

→ Correction

Exercice 3. Soit $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ une famille libre d'un espace vectoriel V ($n \geq 2$). On considère les vecteurs $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ donnés comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= \vec{v}_1, \\ \vec{w}_2 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \\ &\vdots \\ \vec{w}_n &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n. \end{aligned}$$

Montrer que les vecteurs $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ sont linéairement indépendants.

→ Correction

Exercice 4 (Extrait du DS de Mars 2024). Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la famille $\mathcal{F} = \{f, g, h\}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, $g(x) = x \sin x$ et $h(x) = x^2 \cos x$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre dans E.

→ Correction

Exercice 5. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois vecteurs de E :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{2x} \qquad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{3x}$$

Montrer que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre. (On pourra considérer le comportement de la fonction exponentielle à l'infini.)

→ Correction

Exercice 6. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont linéairement indépendants, alors il en est de même pour $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v} + \vec{w}$ et $\vec{u} + \vec{w}$. La réciproque est-elle vraie ?

→ Correction

Exercice 7. Montrer que les vecteurs $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (2, 1)$, $\vec{w} = (3, 2)$ engendrent $\mathbb{R}^2$. Exprimer le vecteur (x, y) comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. Cette décomposition suivant les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ est-elle unique ?

→ Correction

Exercice 8. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\vec{u}_1 = (1, -2, 1, 2), \quad \vec{u}_2 = (1, -3, 1, 2), \quad \vec{u}_3 = (2, -4, 3, 4) \quad \text{et} \quad \vec{u}_4 = (1, -1, 2, 3).$$

(8.1) Montrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(8.2) Soit $\vec{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$.

→ Correction

Exercice 9. Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(9.1) Rappeler quelle est la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(9.2) Montrer que $\mathcal{B}' = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(9.3) Déterminer les coordonnées de la matrice $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

→ Correction

Exercice 10. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (1, -1, 2)$ et $\vec{v} = (-1, 1, 1)$.

(10.1) Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

(10.2) Compléter $\mathcal{F}$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

→ Correction

Exercice 11. Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

(11.1) Rappeler ce qu'est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, notée $\mathcal{B}_c$.

(11.2) On considère les polynômes $A = 1 - X + X^2$ et $B = 1 + X + X^2$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

- (a) Montrer que $\{A, B\}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}_3[X]$.
- (b) Compléter la famille $\{A, B\}$ en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
- (c) Déterminer les coordonnées du polynôme $P = -7X - 3X^2 - 8X^3$ dans la base $\mathcal{B}'$.

→ Correction

Exercice 12. Soient $n \geq 1$ un entier, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille $(1, X - 1, (X - 1)^2, \dots, (X - 1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

→ Correction

Exercice 13. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0 \text{ et } z + t = 0\}$.

(13.1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(13.2) Donner une base de E, puis la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

(13.3) Les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, 2, -2)$, $\vec{u}_2 = (-1, 0, -1, 1)$ et $\vec{u}_3 = (-2, 1, -1, 1)$ forment-ils une famille génératrice de E ?

→ Correction

Exercice 14. Soient a, b, c trois réels. On considère l'ensemble

$$G = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}.$$

(14.1) Démontrer que : si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, c.-à-d. un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(14.2) Qu'en est-il si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$?

→ Correction

Exercice 15 (Extrait de l'Examen d'Avril 2024)**.** Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels F et G définis comme suit :

$$F = \left\{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{smallmatrix} x-y-7z-2t=0 \\ x+y-4z+t=0 \end{smallmatrix} \right\}$$

$$G = \mathrm{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} \quad \text{avec} \quad \vec{w}_1 = (3, 6, 1, -5) \quad \text{et} \quad \vec{w}_2 = (4, -1, 2, 1).$$

(15.1) Déterminer une base de F composée de vecteurs à coordonnées entières, puis préciser la dimension de F.

(15.2) Donner une base de G, puis préciser la dimension de G.

(15.3) Trouver une base de $F \cap G$. En déduire la dimension de $F \cap G$.

(15.4) Calculer la dimension de $F + G$.

(15.5) Déterminer une base de $F + G$. Détailler la méthode et justifier.

(15.6) Compléter la base de $F + G$ trouvée à la question précédente en une base de $\mathbb{R}^4$. Détailler la méthode.

→ Correction

Exercice 16. Soit S l'ensemble des suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On munit S de l'opération interne $+$ et de l'opération externe $\cdot$ comme suit :

$$\forall u, v \in S, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(16.1) Montrer que S est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(16.2) Soit F l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de S.

(b) Soient $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à F.

(c) Montrer que : pour tout $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(u_0, u_1) = \lambda(1, r) + \mu(1, s)$.

(d) En déduire que $((r^n)_{n\in\mathbb{N}}, (s^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de F.

→ Correction

Exercice 17. Soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ une base d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$.

(17.1) Montrer que l'ensemble $\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de V de dimension $n - 1$.

(17.2) Soit $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i$ un vecteur donné de V. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ si et seulement si les vecteurs $\vec{v} - \vec{v}_1, \vec{v} - \vec{v}_2, \dots, \vec{v} - \vec{v}_n$ sont linéairement dépendants.

→ Correction

Exercice 18. Soient U, V deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$. Montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) \geq n-2$.

→ Correction

Exercice 19. Soit $\mathbb{R}_3[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Pour $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, on désigne par $P'(X)$ son polynôme dérivé.

(19.1) Montrer que les polynômes $P(X)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$ forment un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_3[X]$.

(19.2) Montrer que $\mathcal{B} = \{(X-1)^2, X(X-1)^2\}$ est une base de F.

(19.3) Compléter $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(19.4) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

→ Correction

Exercice 20. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $P = \{f \in E \mid f \text{ est paire}\}$ et $I = \{f \in E \mid f \text{ est impaire}\}$. Étant donné $f \in E$, on définit deux éléments f_p et f_i de E comme suit :

$$f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(20.1) Montrer que $f_p \in P$ et $f_i \in I$.

(20.2) En déduire que $E = P + I$.

(20.3) Montrer que $E = P \oplus I$.

→ Correction

Exercice 21. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $F = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}$.

(21.1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

(21.2) Montrer que $E = F \oplus G$.

→ Correction

Exercice 22. On considère dans $\mathbb{R}_3[X]$ les sous-espaces vectoriels

$$E = \{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$

et

$$F = \text{Vect}\{1 - X - X^2, X - X^3, 1 + X^2 + X^3\}.$$

La somme $E + F$ est-elle directe ? Si oui, E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$? → Correction

Exercice 23. Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité. Montrer qu'il existe un entier naturel p non nul, et des réels $a_0, \dots, a_p$ non tous nuls tels que :

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_p A^p = \Theta,$$

où Θ est la matrice nulle. → Correction

Exercice 24. Soient D l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, et T l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de trace nulle.

(24.1) Montrer que D et T sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(24.2) Montrer que la somme $D + T$ est directe.

(24.3) Donner une base de D, T et $D \oplus T$.

→ Correction

Exercice 25. Soit E l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(25.1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, puis donner une base de E.

(25.2) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer une base de l'espace vectoriel $E \cap \mathrm{Vect}\{A, B\}$, puis la compléter en une base de E.

→ Correction

Exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite triangulaire supérieure si $A_{ij} = 0$ lorsque $i > j$ (c'est-à-dire, tous les coefficients situés sous la première diagonale sont nuls).

(26.1) Montrer que l'ensemble T des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(26.2) Donner une base de T et $\dim_{\mathbb{R}} T$.

(26.3) Montrer que si $A, B \in T$, alors $AB \in T$.

→ Correction

Exercice 27. Soient $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. La transposée de A est la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, qu'on note A^t, donnée par :

$$(A^t)_{ij} = A_{ji} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m.$$

Lorsque $n = m$, on dira que A est symétrique si $A^t = A$, et on dira que A est antisymétrique si $A^t = -A$.

(27.1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer les propriétés suivantes :

$$(A + B)^t = A^t + B^t, \quad (\alpha A)^t = \alpha(A^t) \quad \text{et} \quad (A^t)^t = A.$$

(27.2) Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $(AB)^t = B^t A^t$.

(27.3) Montrer que l'ensemble S des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une base de S pour $n = 3$.

(27.4) Montrer que l'ensemble S' des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une base de S' pour $n = 3$.

(27.5) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus S'$.

→ Correction

Corrections fiche 4 : Familles Génératrices, Bases et Dimension

Exercice 1.

(1.1) $\forall \vec{v} \in V, \exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, \vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$.

(1.2) $\exists \vec{v} \in V, \forall(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, \vec{v} \neq \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$.

(1.3) $\forall(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0} \implies \forall i, \alpha_i = 0\right)$.

(1.4) $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0} \text{ et } \exists i, \alpha_i \neq 0\right)$.

Exercice 2.

(2.1) On cherche des réels α, β, γ non tous nuls tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

En substituant les coordonnées des vecteurs,

$$\alpha(1,-1,2) + \beta(-1,1,1) + \gamma(3,-3,3) = (0,0,0) \iff (\alpha - \beta + 3\gamma, -\alpha + \beta - 3\gamma, 2\alpha + \beta + 3\gamma) = (0,0,0).$$

Cela revient alors à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 3\gamma = 0, \\ -\alpha + \beta - 3\gamma = 0, \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0. \end{cases}$$

On va déterminer les solutions de ce système avec la méthode du pivot de Gauss. On écrit la matrice augmentée associée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, on pose $\gamma = s$ (variable libre) paramètre réel et on écrit α et β en fonction de s :

$$\alpha = -2s$$
$$\beta = s$$
$$\gamma = s$$

Si $s = 1$, on trouve par exemple la solution $\alpha = -2$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$. Ainsi, on a la relation :

$$-2\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}.$$

(2.2) Comme l'exercice précédente, on cherche des réels α, β, γ non tous nuls tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

Encore une fois, cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ 3\beta + \gamma = 0, \\ -\alpha + 4\beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

On résout par pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On pose alors $\gamma = s$ paramètre réel et on trouve des solutions :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{3}s \\ \beta &= -\frac{1}{3}s \\ \gamma &= s \end{aligned}$$

Par exemple, si $s = 3$ on trouve $\alpha = \beta = -1$ et $\gamma = 3$ et ainsi on a la relation :

$$-\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w} = \vec{0}.$$

Exercice 3.
Supposons qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$\alpha_1\vec{w}_1 + \alpha_2\vec{w}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{w}_n = \vec{0}.$$

En substituant les expressions des $\vec{w}_i$, on obtient :

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \cdots + \alpha_n(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n) = \vec{0}.$$

Cela revient à écrire :

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\vec{v}_1 + (\alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\vec{v}_2 + \cdots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)\vec{v}_{n-1} + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}.$$

Comme la famille $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ est libre, les coefficients de chaque vecteur doivent être nuls :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n &= 0, \\ \alpha_2 + \cdots + \alpha_n &= 0, \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n &= 0, \\ \alpha_n &= 0. \end{aligned}$$

En remontant cette chaîne d'égalités, on trouve que tous les α_i sont nuls. Ainsi, la famille $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ est libre.

Exercice 4.
Supposons qu'il existe des réels α, β, γ tels que :

$$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cela revient à écrire :

$$\alpha \cos x + \beta x \sin x + \gamma x^2 \cos x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On évalue cette équation en $x = \frac{pi}{2}$:

$$\alpha \cos\frac{\pi}{2} + \beta\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{\pi}{2} = 0 \implies \beta\frac{\pi}{2} = 0 \implies \beta = 0.$$

Ensuite, on évalue en $x = 0$:

$$\alpha \cdot \cos 0 + \beta \cdot 0 \cdot \sin 0 + \gamma \cdot 0^2 \cdot \cos 0 = 0 \implies \alpha = 0.$$

Finalement, on évalue en $x = \pi$:

$$\alpha \cdot \cos \pi + \beta \cdot \pi \cdot \sin \pi + \gamma \cdot \pi^2 \cdot \cos \pi = 0 \implies -\gamma\pi^2 = 0 \implies \gamma = 0.$$

Par conséquent, la famille $\mathcal{F} = \{f, g, h\}$ est libre.

Exercice 5.
Supposons qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que :

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cela revient à écrire :

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On divise cette équation par e^{3x} (qui est toujours non nul) :

$$\alpha_1 e^{-2x} + \alpha_2 e^{-x} + \alpha_3 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

L'équation précédente nous dit que la fonction définie par

$$F(x) = \alpha_1 e^{-2x} + \alpha_2 e^{-x} + \alpha_3$$

est identiquement nulle. Ainsi sa limite en $+\infty$ doivent être égale à 0. On étudie le comportement de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} (\alpha_1 e^{-2x} + \alpha_2 e^{-x} + \alpha_3) = \alpha_3.$$

Pour que cette limite soit égale à 0, il faut alors que $\alpha_3 = 0$. Ainsi, on a :

$$\alpha_1 e^{-2x} + \alpha_2 e^{-x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On peut de nouveau diviser par e^{-x} (qui est toujours non nul) :

$$\alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On étudie la limite de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} (\alpha_1 e^{-x} + \alpha_2) = \alpha_2.$$

Pour que cette limite soit égale à 0, il faut alors que $\alpha_2 = 0$. Ainsi, on a :

$$\alpha_1 e^{-2x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Enfin, comme e^{-2x} est toujours non nul, on en déduit que $\alpha_1 = 0$. Par conséquent, la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre.

Exercice 6.
Supposons que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont linéairement indépendants. On considère des réels α, β, γ tels que :

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\vec{v} + \vec{w}) + \gamma(\vec{u} + \vec{w}) = \vec{0}.$$

Cela revient à écrire :

$$(\alpha + \gamma)\vec{u} + (\alpha + \beta)\vec{v} + (\beta + \gamma)\vec{w} = \vec{0}.$$

Comme la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est libre, les coefficients de chaque vecteur doivent être nuls :

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0, \\ \alpha + \beta &= 0, \\ \beta + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

On résout ce système par pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, on trouve que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ainsi, la famille $\{\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{w}\}$ est libre. La réciproque est vraie. En effet, supposons que $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$ et $\vec{u}+\vec{w}$ sont linéairement indépendants. On considère des réels α, β, γ tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

On va réécrire cette équation comme combinaison linéaire de $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$ et $\vec{u}+\vec{w}$. Pour cela on cherche des réels a, b, c tels que :

$$a(\vec{u}+\vec{v}) + b(\vec{v}+\vec{w}) + c(\vec{u}+\vec{w}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}.$$

Cela revient à écrire :

$$(a+c)\vec{u} + (a+b)\vec{v} + (b+c)\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}.$$

On identifie les coefficients et on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} a + c &= \alpha, \\ a + b &= \beta, \\ b + c &= \gamma. \end{aligned}$$

On résout ce système par pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha \\ 0 & 1 & 1 & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & 2 & \gamma-\beta+\alpha \end{array}\right)$$

Donc, on trouve :

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}(\gamma-\beta+\alpha), \\ b &= \beta-\alpha+\frac{1}{2}(\gamma-\beta+\alpha) = \frac{1}{2}(\beta-\alpha+\gamma), \\ a &= \alpha-\frac{1}{2}(\gamma-\beta+\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)(\vec{u}+\vec{v}) + \frac{1}{2}(\beta-\alpha+\gamma)(\vec{v}+\vec{w}) + \frac{1}{2}(\gamma-\beta+\alpha)(\vec{u}+\vec{w}) = \vec{0}.$$

Comme la famille $\{\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{w}\}$ est libre, les coefficients de chaque vecteur doivent être nuls. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{aligned} \alpha+\beta-\gamma &= 0, \\ \beta-\alpha+\gamma &= 0, \\ \gamma-\beta+\alpha &= 0. \end{aligned}$$

On utilise encore une fois le pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, on trouve le système équivalent :

$$\begin{aligned} \alpha+\beta-\gamma &= 0, \\ 2\beta &= 0, \\ 2\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, ce qui implique que $\alpha = 0$. Par conséquent, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est libre.

Exercice 7.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On cherche des réels α, β, γ tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = (x, y).$$

Cela revient à écrire :

$$\alpha(1,-1) + \beta(2,1) + \gamma(3,2) = (x,y) \iff (\alpha + 2\beta + 3\gamma, -\alpha + \beta + 2\gamma) = (x,y).$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = x, \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = y. \end{cases}$$

On résout ce système par pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ -1 & 1 & 2 & y \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 3 & 5 & x+y \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{x+y}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{x-2y}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{x+y}{3} \end{array}\right)$$

On pose alors $\gamma = t$ paramètre réel et on trouve des solutions :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x-2y}{3} + \frac{1}{3}t, \\ \beta &= \frac{x+y}{3} - \frac{5}{3}t, \\ \gamma &= t. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$(x,y) = \left(\frac{x-2y}{3} + \frac{1}{3}t\right)\vec{u} + \left(\frac{x+y}{3} - \frac{5}{3}t\right)\vec{v} + t\vec{w}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ engendrent $\mathbb{R}^2$. Cependant, la décomposition n'est pas unique car elle dépend du paramètre libre t. Par exemple, si on choisit $t = 0$, on obtient la décomposition :

$$\begin{aligned} (x,y) &= \boxed{\left(\frac{x-2y}{3} + \frac{1}{3}\cdot 0\right)\vec{u} + \left(\frac{x+y}{3} - \frac{5}{3}\cdot 0\right)\vec{v} + 0\cdot\vec{w}} \\ &= \frac{x-2y}{3}\vec{u} + \frac{x+y}{3}\vec{v} \\ &= \left(\frac{x-2y}{3}\right)(1,-1) + \left(\frac{x+y}{3}\right)(2,1), \\ &= \left(\frac{x-2y}{3} + \frac{2x+2y}{3}, \frac{-x+2y}{3} + \frac{x+y}{3}\right) \end{aligned}$$

tandis que si on choisit $t = 3$, on obtient la décomposition différente :

$$\begin{aligned} (x,y) &= \boxed{\left(\frac{x-2y}{3} + \frac{1}{3}\cdot 3\right)\vec{u} + \left(\frac{x+y}{3} - \frac{5}{3}\cdot 3\right)\vec{v} + 3\cdot\vec{w}} \\ &= \left(\frac{x-2y}{3} + 1\right)\vec{u} + \left(\frac{x+y}{3} - 5\right)\vec{v} + 3\cdot\vec{w}. \end{aligned}$$

Exercice 8.

> **Rappel 1.** Soit S un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel E. Une famille de vecteurs $\mathcal{B}$ de S est une base de S si et seulement si elle est libre et génératrice de S. Autrement dit,
>
> - $\mathrm{Vec}(\mathcal{B}) = \mathrm{span}(\mathcal{B}) = S$ (génératrice);
> - si une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ est égale au vecteur nul, alors tous les coefficients de cette combinaison sont nuls (linéairement indépendante ou libre).
>
> On rappelle également que la dimension de S est égale au nombre de vecteurs dans une base de S. De plus, si

> $\dim(S) = n$, tout ensemble de n vecteurs linéairement indépendants de S est une base de S, et tout ensemble de n vecteurs générateurs de S est aussi une base de S.

(8.1) Pour montrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, il suffit de montrer que cette famille est libre (car elle contient 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, elle sera automatiquement génératrice). On considère des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tels que :

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 + \alpha_4\vec{u}_4 = \vec{0}.$$

Cela revient à écrire :

$$\alpha_1(1,-2,1,2) + \alpha_2(1,-3,1,2) + \alpha_3(2,-4,3,4) + \alpha_4(1,-1,2,3) = (0,0,0,0).$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ -2\alpha_1 - 3\alpha_2 - 4\alpha_3 - \alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0, \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

On résout ce système par pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Le système équivalent est donc :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 &= 0, \\ -\alpha_2 + \alpha_4 &= 0, \\ \alpha_3 + \alpha_4 &= 0, \\ \alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha_4 = 0$, puis $\alpha_3 = 0$, ensuite $\alpha_2 = 0$ et enfin $\alpha_1 = 0$. Par conséquent, la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ est libre et donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

(8.2) Pour calculer les coordonnées de $\vec{u} = (x, y, z, t)$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$, on cherche des réels $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ tels que :

$$\beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \beta_3\vec{u}_3 + \beta_4\vec{u}_4 = \vec{u}.$$

Cela revient à écrire :

$$\beta_1(1,-2,1,2) + \beta_2(1,-3,1,2) + \beta_3(2,-4,3,4) + \beta_4(1,-1,2,3) = (x,y,z,t).$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + \beta_4 = x, \\ -2\beta_1 - 3\beta_2 - 4\beta_3 - \beta_4 = y, \\ \beta_1 + \beta_2 + 3\beta_3 + 2\beta_4 = z, \\ 2\beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3 + 3\beta_4 = t. \end{cases}$$

On résout ce système par pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & x \\ -2 & -3 & -4 & -1 & y \\ 1 & 1 & 3 & 2 & z \\ 2 & 2 & 4 & 3 & t \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & 1 & y + 2x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z - x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t - 2x \end{array}\right)$$

Le système équivalent est donc :

$$\begin{aligned}
\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + \beta_4 &= x, \\
-\beta_2 + \beta_4 &= y + 2x, \\
\beta_3 + \beta_4 &= z - x, \\
\beta_4 &= t - 2x.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\beta_4 = t - 2x$, puis

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= (z - x) - \beta_4 \\
&= (z - x) - (t - 2x) \\
&= z + x - t,
\end{aligned}$$

ensuite

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \beta_4 - (y + 2x) \\
&= (t - 2x) - (y + 2x) \\
&= t - y - 4x,
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= x - \beta_2 - 2\beta_3 - \beta_4 \\
&= x - (t - y - 4x) - 2(z + x - t) - (t - 2x) \\
&= x - t + y + 4x - 2z - 2x + 2t - t + 2x \\
&= 5x + y - 2z.
\end{aligned}$$

Par conséquent, les coordonnées de $\vec{u} = (x, y, z, t)$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ sont :

$$(5x + y - 2z,\ t - y - 4x,\ z + x - t,\ t - 2x).$$

Exercice 9.

> **Rappel 2.** L'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées 2×2 à coefficients réels est un espace vectoriel de dimension 4. La base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est constituée des matrices suivantes :
>
> $$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(9.1) Voir le rappel ci-dessus.

(9.2) Pour montrer que $\mathcal{B}' = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que cette famille est libre (car elle contient 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, elle sera automatiquement génératrice). On considère des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que :

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = O,$$

où O est la matrice nulle. Cela revient à écrire :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases}
\alpha + \gamma + \delta = 0, \\
\alpha - \beta - \gamma = 0, \\
\alpha + \beta = 0, \\
\alpha = 0.
\end{cases}$$

Ce système est facile à résoudre par substitution directe à partir de la dernière équation. On trouve que $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$, ensuite $\gamma = 0$ et enfin $\delta = 0$. Par conséquent, la famille (A, B, C, D) est libre et donc c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(9.3) Pour déterminer les coordonnées de la matrice $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$, on cherche des réels a, b, c, d tels que :

$$aA + bB + cC + dD = U.$$

Cela revient à écrire :

$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} a + c + d = 2, \\ a - b - c = 3, \\ a + b = 4, \\ a = -7. \end{cases}$$

Encore une fois, ce système est facile à résoudre par substitution directe à partir de la dernière équation. On trouve que $a = -7$, puis $b = 11$, ensuite $c = a - b - 3 = -7 - 11 - 3 = -21$ et enfin $d = 2 - a - c = 2 - (-7) - (-21) = 30$. Par conséquent, les coordonnées de la matrice U dans la base $\mathcal{B}'$ sont $(-7, 11, -21, 30)$.

Exercice 10.

(10.1) Pour montrer que la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$, on considère des réels α et β tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}.$$

Cela revient à écrire :

$$\alpha(1, -1, 2) + \beta(-1, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0, \\ -\alpha + \beta = 0, \\ 2\alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

On résout ce système par pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_3 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On trouve ainsi que $\beta = 0$ et ensuite $\alpha = 0$. Par conséquent, la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

(10.2) **Première méthode :** Pour compléter $\mathcal{F}$ en une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de trouver un vecteur $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ soit libre. Pour cela, on peut par exemple choisir le vecteur qui est orthogonal au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ce vecteur peut être obtenue en effectuant le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1 - 2)\vec{i} - (1 - (-2))\vec{j} + (1 - 1)\vec{k} = (-3, -3, 0).$$

La famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est alors libre et constitue une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, une base de $\mathbb{R}^3$ complétant $\mathcal{F}$ est donnée par :

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \{(1, -1, 2), (-1, 1, 1), (-3, -3, 0)\}.$$

Deuxième méthode : On peut aussi compléter la famille $\mathcal{F}$ en une base de $\mathbb{R}^3$ en posant $\vec{w} = (x, y, z)$ et en cherchant des valeurs de x, y et z telles que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ soit libre. Pour cela, on considère des réels α, β et γ tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

Cela revient à écrire :

$$\alpha(1,-1,2)+\beta(-1,1,1)+\gamma(x,y,z)=(0,0,0).$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma x=0,\\ -\alpha+\beta+\gamma y=0,\\ 2\alpha+\beta+\gamma z=0.\end{cases}$$

La famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est libre si et seulement si le seul triplet (α,β,γ) qui satisfait ce système est $(0,0,0)$. On peut résoudre ce système par pivot de Gauss et determiner les conditions sur x, y et z pour que la seule solution soit la solution triviale :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&x&0\\-1&1&y&0\\2&1&z&0\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-2L_1]{L_2\leftarrow L_2+L_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&x&0\\0&0&x+y&0\\0&3&z-2x&0\end{array}\right)\xrightarrow{L_2\leftarrow L_3\leftrightarrow L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&x&0\\0&3&z-2x&0\\0&0&x+y&0\end{array}\right)$$

Pour que la seule solution soit la solution triviale, il faut que le pivot $x+y$ soit non nul, c.-à-d. que $x+y\neq 0$. Par exemple, on peut choisir $x=1$ et $y=1$, puis $z=0$. Ainsi, une base de $\mathbb{R}^3$ complétant $\mathcal{F}$ est donnée par :

$$\mathcal{B}=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}=\{(1,-1,2),(-1,1,1),(1,1,0)\}.$$

Exercice 11.

(11.1) La base canonique $\mathcal{B}_c$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ est constituée des polynômes suivants :

$$1,\quad X,\quad X^2,\quad X^3.$$

(11.2)

(a) Pour montrer que la famille $\{A,B\}$ est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère des réels α et β tels que :

$$\alpha A+\beta B=0.$$

Cela revient à écrire :

$$\alpha(1-X+X^2)+\beta(1+X+X^2)=0.$$

On obtient alors le système suivant en identifiant les coefficients des polynômes :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0,\\ -\alpha+\beta=0,\\ \alpha+\beta=0.\end{cases}$$

On résout ce système par pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\-1&1&0\\1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2+L_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&2&0\\0&0&0\end{array}\right)\implies\begin{cases}\alpha+\beta=0,\\ 2\beta=0.\end{cases}$$

On trouve ainsi que $\beta=0$ et ensuite $\alpha=0$. Par conséquent, la famille $\{A,B\}$ est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) Pour compléter la famille $\{A,B\}$ en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_3[X]$ on commence par remarquer que les polynômes A et B n'ont pas de terme en X^3. Par conséquent, toute combinaison linéaire de A et B n'aura pas non plus de terme en X^3. Pour obtenir une base de $\mathbb{R}_3[X]$, il faut donc ajouter un polynôme qui contient un terme en X^3. On peut par exemple choisir le polynôme $C=X^3$. On a alors que la famille $\{A,B,C\}$ est libre. Pour compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}_3[X]$, on cherche un polynôme $D=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$ tel que la famille $\{A,B,C,D\}$ soit libre. On considère des réels $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ tels que :

$$\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D=0.$$

Cela revient à écrire :

$$\alpha(1-X+X^2)+\beta(1+X+X^2)+\gamma X^3+\delta(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3)=0.$$

On obtient alors le système suivant en identifiant les coefficients des polynômes :

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\delta a_0=0,\\ -\alpha+\beta+\delta a_1=0,\\ \alpha+\beta+\delta a_2=0,\\ \gamma+\delta a_3=0.\end{cases}$$

On résout ce système par pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & a_0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & a_1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & a_2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & a_3 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2+L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & a_0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & a_0+a_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_2-a_0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & a_3 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & a_0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & a_0+a_1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & a_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_2-a_0 & 0\end{array}\right)$$

Comme l'exercice précédente, on trouve que la famille $\{A,B,C,D\}$ est libre si et seulement si le pivot a_2-a_0 est non nul, c.-à-d. que $a_2\neq a_0$. Ainsi, on peut choisir par exemple $a_0=0$, $a_1=0$, $a_2=1$ et $a_3=0$. On obtient alors le polynôme $D=X^2$. Par conséquent, une base de $\mathbb{R}_3[X]$ complétant la famille $\{A,B\}$ est donnée par :

$$\mathcal{B}'=\{A,B,C,D\}=\{1-X+X^2,\ 1+X+X^2,\ X^3,\ X^2\}.$$

(c) Pour déterminer les coordonnées du polynôme $P=-7X-3X^2-8X^3$ dans la base $\mathcal{B}'$, on cherche des réels a,b,c,d tels que :

$$aA+bB+cC+dD=P.$$

Cela revient à écrire :

$$a(1-X+X^2)+b(1+X+X^2)+cX^3+dX^2=-7X-3X^2-8X^3.$$

On obtient alors le système suivant en identifiant les coefficients des polynômes :

$$\begin{cases}a+b=0,\\ -a+b=-7,\\ a+b+d=-3,\\ c=-8.\end{cases}$$

On résout ce système par pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & -7\\ 1 & 1 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8\end{array}\right) \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2+L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8\end{array}\right) \xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\end{array}\right)$$

On trouve ainsi que $d=-3$, $c=-8$, ensuite $b=-\frac{7}{2}$ et enfin $a=\frac{7}{2}$. Par conséquent, les coordonnées du polynôme P dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\left(\frac{7}{2},\ -\frac{7}{2},\ -8,\ -3\right).$$

Exercice 12. **Première façon :** Pour montrer que la famille $(1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de montrer que cette famille est libre car elle contient $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$, elle sera automatiquement génératrice.

On considère des réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1(X-1) + \alpha_2(X-1)^2 + \dots + \alpha_n(X-1)^n = 0.$$

Cela revient à écrire :

$$P(X) = \alpha_0 + \alpha_1(X-1) + \alpha_2(X-1)^2 + \dots + \alpha_n(X-1)^n = 0.$$

Le polynôme $P(X)$ est nul pour tout X. En particulier, on a $P(1) = 0$, ce qui implique que $\alpha_0 = 0$. En dérivant $P(X)$ une première fois, on obtient :

$$P'(X) = \alpha_1 + 2\alpha_2(X-1) + \dots + n\alpha_n(X-1)^{n-1} = 0.$$

On a donc $P'(1) = \alpha_1 = 0$. En continuant ce processus de dérivation et d'évaluation en $X = 1$, on trouve que tous les coefficients α_i sont nuls. Par conséquent, la famille est libre. Ainsi, la famille $(1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

> **Exercice complémentaire 1** (Deuxième façon)**.** Une autre méthode pour montrer que cette famille est une base consiste à utiliser la définition, le fait que $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est une base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et à exprimer chaque vecteur de la famille $(1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^n)$ en fonction de la base canonique (pénser à développer les puissances de $(X-1)$ avec le binôme de Newton). On peut alors construire une matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la famille dans la base canonique et montrer que cette matrice est inversible (par exemple en calculant son déterminant ou en utilisant le pivot de Gauss). Cela prouvera que la famille est libre et donc une base.

Troisième façon : Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ quelconque. Par le Theorème de Taylor, pour tout $a \in \mathbb{R}$ on peut écrire P de la manière suivante :

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n.$$

En particulier, en choisissant $a = 1$, on trouve que :

$$P(X) = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2!}(X-1)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(1)}{n!}(X-1)^n.$$

Cette écriture montre que tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^n)$. Par conséquent, cette famille est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme elle contient $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$, elle est aussi libre. Ainsi, la famille $(1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 13.

(13.1) Pour montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, il faut vérifier les trois propriétés suivantes :

- **E est non vide :** Il est evident que le vecteur nul $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$ appartient à E.
- **Stabilité par addition :** Soient $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ deux vecteurs de E. Alors, on a :

  $$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2).$$

  On vérifie que :

  $$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2) = 0 + 0 = 0,$$

  et

  $$(z_1 + z_2) + (t_1 + t_2) = (z_1 + t_1) + (z_2 + t_2) = 0 + 0 = 0.$$

  Donc, $\vec{u} + \vec{v} \in E$.

— **Stabilité par multiplication scalaire :** Soit $\vec{u} = (x, y, z, t)$ un vecteur de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

$$\lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t).$$

On vérifie que :

$$(\lambda x) + (\lambda y) - (\lambda z) = \lambda(x + y - z) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

et

$$(\lambda z) + (\lambda t) = \lambda(z + t) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Donc, $\lambda\vec{u} \in E$.

Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(13.2) Pour déterminer une base de E, on va montrer que tout vecteur $\vec{v} = (x, y, z, t) \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de certains vecteurs linéairement indépendants. Pour cela, on va trouver tous les vecteurs $\vec{v} = (x, y, z, t)$ qui satisfont les équations $x + y - z = 0$ et $z + t = 0$. Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ z + t = 0. \end{cases}$$

La matrice augmentée associée à ce système est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Cette matrice est déjà en forme échelonnée. On peut exprimer les variables x et z en fonction de y et t :

$$\begin{aligned} &z = -t, \\ &x = -y + z = -y - t. \end{aligned}$$

Par conséquent, tout vecteur $\vec{v} \in E$ peut s'écrire comme :

$$\vec{v} = (x, y, z, t) = (-y - t, y, -t, t) = y(-1, 1, 0, 0) + t(-1, 0, -1, 1).$$

Ainsi,

$$E = \text{Vect}\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 1)\}.$$

Les vecteurs $\vec{v}_1 = (-1, 1, 0, 0)$ et $\vec{v}_2 = (-1, 0, -1, 1)$ sont linéairement indépendants, donc ils forment une base de E. Pour compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$, on peut ajouter deux vecteurs supplémentaires qui sont linéairement indépendants des vecteurs de la base de E. Par exemple, on peut choisir les vecteurs $\vec{v}_3 = (0, 0, 1, 0)$ et $\vec{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants car la matrice formée par les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ possède un echelonnement avec des pivots non nuls sur chaque ligne :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, une base de $\mathbb{R}^4$ complétant la base de E est donnée par :

$$\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

(13.3) Pour déterminer si les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, 2, -2)$, $\vec{u}_2 = (-1, 0, -1, 1)$ et $\vec{u}_3 = (-2, 1, -1, 1)$ forment une famille génératrice de E, il faut vérifier si tout vecteur $\vec{v} \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs. Pour cela, on considère un vecteur générique $\vec{v} = (x, y, z, t) \in E$ et on cherche des réels α_1, α_2 et α_3 tels que :

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 = \vec{v}.$$

Cela revient à écrire :

$$\alpha_1(1,1,2,-2)+\alpha_2(-1,0,-1,1)+\alpha_3(-2,1,-1,1)=(x,y,z,t).$$

On obtient alors le système suivant en identifiant les coordonnées :

$$\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3=x,\\ \alpha_1+\alpha_3=y,\\ 2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=z,\\ -2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=t.\end{cases}$$

On résout ce système par pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&x\\1&0&1&y\\2&-1&-1&z\\-2&1&1&t\end{array}\right)\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4+2L_1]{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&x\\0&1&3&y-x\\0&1&3&z-2x\\0&-1&-3&t+2x\end{array}\right)\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4+L_2]{L_3\leftarrow L_3-L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&x\\0&1&3&y-x\\0&0&0&z-y-x\\0&0&0&t+y+x\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&x\\0&1&3&y-x\\0&0&0&t+y+x\\0&0&0&z-y-x\end{array}\right)\xrightarrow[t=-z]{-x-y+z=0}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&x\\0&1&3&y-x\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Le système équivalent est :

$$\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3=x,\\ \alpha_2+3\alpha_3=y-x.\end{cases}$$

On écrit α_1 et α_2 en fonction de α_3 :

$$\begin{aligned}&\alpha_2=y-x-3\alpha_3,\\ &\alpha_1=x+\alpha_2+2\alpha_3=x+(y-x-3\alpha_3)+2\alpha_3=y-\alpha_3.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout vecteur $\vec{v}=(x,y,z,t)\in E$ on peut écrire :

$$\vec{v}=(x,y,z,t)=(y-\alpha_3)\vec{u}_1+(y-x-3\alpha_3)\vec{u}_2+\alpha_3\vec{u}_3$$

où α_3 est un paramètre libre. Ainsi, les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ forment une famille génératrice de E.

Exercice 14.

(14.1) Pour montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il faut vérifier les trois propriétés suivantes :

- **G est non vide :** Il est evident que le vecteur nul $\vec{0}=(0,0,0)$ appartient à G car $a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0=0$.
- **Stabilité par addition :** Soient $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ et $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ deux vecteurs de G. Alors, on a :

  $$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2).$$

  On vérifie que :

  $$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2)=(ax_1+by_1+cz_1)+(ax_2+by_2+cz_2)=0+0=0,$$

  Donc, $\vec{u}+\vec{v}\in G$.
- **Stabilité par multiplication scalaire :** Soit $\vec{u}=(x,y,z)$ un vecteur de G et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors, on a :

  $$\lambda\vec{u}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z).$$

  On vérifie que :

  $$a(\lambda x)+b(\lambda y)+c(\lambda z)=\lambda(ax+by+cz)=\lambda\cdot 0=0.$$

  Donc, $\lambda\vec{u}\in G$.

Par conséquent, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer la dimension de G on remarque que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ implique qu'au moins un des réels a, b ou c est non nul. Supposons sans perte de généralité que $c \neq 0$. Alors, on peut exprimer z en fonction de x et y :

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y.$$

Par conséquent, tout vecteur $\vec{v} = (x, y, z) \in G$ peut s'écrire comme :

$$\vec{v} = (x, y, z) = \left(x, y, -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y\right) = x\left(1, 0, -\frac{a}{c}\right) + y\left(0, 1, -\frac{b}{c}\right).$$

Ainsi,

$$G = \mathrm{Vect}\left\{\left(1, 0, -\frac{a}{c}\right), \left(0, 1, -\frac{b}{c}\right)\right\}.$$

Les vecteurs $\vec{v}_1 = \left(1, 0, -\frac{a}{c}\right)$ et $\vec{v}_2 = \left(0, 1, -\frac{b}{c}\right)$ sont linéairement indépendants, donc ils forment une base de G. Par conséquent, la dimension de G est 2.

(14.2) Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, alors l'équation $0x + 0y + 0z = 0$ est satisfaite par tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, dans ce cas, $G = \mathbb{R}^3$. Ainsi, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.

Exercice 15.

(15.1) Pour déterminer une base de F, on commence par noter que F correspond à l'ensemble des vecteurs $\vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ qui satisfont les équations suivantes :

$$\begin{cases} x - y - 7z - 2t = 0, \\ x + y - 4z + t = 0. \end{cases}$$

Cela veut dire que F consiste en les solutions du système d'équations linéaires défini par ces deux équations. Pour trouver une base de F, on va résoudre le système d'équations linéaires défini par les conditions de F :

$$\begin{cases} x - y - 7z - 2t = 0, \\ x + y - 4z + t = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & -2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On écrit la matrice augmentée associée à ce système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -7 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

On peut exprimer x et y en fonction de z et t :

$$y = -\frac{3}{2}z - \frac{3}{2}t,$$
$$x = y + 7z + 2t = -\frac{3}{2}z - \frac{3}{2}t + 7z + 2t = \frac{11}{2}z + \frac{1}{2}t.$$

Par conséquent, tout vecteur $\vec{v} = (x, y, z, t) \in F$ peut s'écrire comme :

$$\vec{v} = (x, y, z, t) = \left(\frac{11}{2}z + \frac{1}{2}t, -\frac{3}{2}z - \frac{3}{2}t, z, t\right) = \frac{z}{2}\underbrace{(11, -3, 1, 0)}_{\vec{u}_2} + \frac{t}{2}\underbrace{(1, -3, 0, 2)}_{\vec{u}_1}.$$

Ainsi,

$$F = \mathrm{Vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}.$$

est une base de F à coordonnées entières. Par conséquent, la dimension de F est 2.

(15.2) Les vecteurs $\vec{w}_1 = (3,6,1,-5)$ et $\vec{w}_2 = (4,-1,2,1)$ sont linéairement indépendants car la matrice formée par ces vecteurs possède un echelonnement avec des pivots non nuls sur chaque ligne :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -1 \\ 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + \frac{5}{3}L_1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1}} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -9 \\ 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{23}{3} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, une base de G est donnée par :

$$G = \mathrm{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}.$$

La dimension de G est donc 2. Une autre manière de procéder(peut-être plus simple) consiste à vérifier que les vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ ne sont pas colinéaires, ce qui revient à vérifier que les coordonnées de $\vec{w}_1$ ne sont pas proportionnelles à celles de $\vec{w}_2$.

(15.3) On procède par des équivalences comme suit :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F \cap G &\Leftrightarrow (x,y,z,t) \in F \text{ et } (x,y,z,t) \in G \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 7z - 2t = 0, \\ x + y - 4z + t = 0, \end{cases} \quad \text{et } \exists a,b \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x,y,z,t) = a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 7z - 2t = 0, \\ x + y - 4z + t = 0, \end{cases} \quad \text{et } \exists a,b \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x = 3a + 4b, \\ y = 6a - b, \\ z = a + 2b, \\ t = -5a + b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x = 3a - 4b, \\ y = 6a - b, \\ z = a + 2b, \\ t = -5a + b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3a - 4b - (6a - b) - 7(a + 2b) - 2(-5a + b) = 0, \\ 3a - 4b + (6a - b) - 4(a + 2b) + (-5a + b) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x = 3a - 4b, \\ y = 6a - b, \\ z = a + 2b, \\ t = -5a + b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0a - 19b = 0, \\ 0a - 12b = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x,y,z,t) = a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 \text{ et } \begin{cases} -19b = 0, \\ -12b = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi un vecteur $\vec{v} = (x,y,z,t)$ appartient à $F \cap G$ si et seulement si il existe des réels a et b tels que $(x,y,z,t) = a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2$ et $-19b = 0$ et $-12b = 0$. Cela revient à dire que $b = 0$. Par conséquent, les vecteurs de $F \cap G$ sont exactement les vecteurs de la forme $a\vec{w}_1$ où $a \in \mathbb{R}$. Ainsi, une base de $F \cap G$ est donnée par :

$$F \cap G = \mathrm{Vect}\{\vec{w}_1\}.$$

Par conséquent, la dimension de $F \cap G$ est 1.

(15.4) Pour calculer la dimension de $F + G$, on utilise la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En remplaçant les valeurs trouvées précédemment, on obtient :

$$\dim(F + G) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

(15.5) Pour déterminer une base de $F+G$, on commence par rappeler que $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ qui contient à la fois F et G. Par conséquent, une base de $F+G$ peut être obtenue en combinant les bases de F et de G, puis en éliminant les vecteurs linéairement dépendants. On a déjà trouvé que l'intersection $F\cap G$ est de dimension 1 et est engendrée par le vecteur $\vec{w}_1$. De plus $G = \text{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. Ainsi $\vec{w}_1 \notin F\cap G$ (car sinon $F\cap G$ serait de dimension 2 parce-que $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont linéairement indépendants). Comme $\vec{w}_1 \in G$ on en déduit que $\vec{w}_1 \notin F$. Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{w}_1$ sont linéairement indépendants. Comme la dimension de $F+G$ est 3, on en déduit que les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{w}_1$ forment une base de $F+G$. Ainsi, une base de $F+G$ est donnée par :

$$\mathcal{B}_{F+G} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1\} = \{(1,-3,0,2),(11,-3,2,0),(3,6,1,-5)\}.$$

(15.6) Pour compléter la base de $F+G$ en une base de $\mathbb{R}^4$, on cherche un vecteur $\vec{v} = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1, \vec{v}\}$ soit une base de $\mathbb{R}^4$. Cela revient à dire que les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{w}_1$ et $\vec{v}$ doivent être linéairement indépendants. On va tester avec des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ pour trouver un tel vecteur $\vec{v}$. On commence par tester avec le vecteur $\vec{e}_1 = (1,0,0,0)$. Pour déterminer si les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{w}_1$ et $\vec{e}_1$ sont linéairement indépendants, on écrit la matrice formée par ces vecteurs et on vérifie que le rang de cette matrice est égal à 4 (cela implique que le système obtenu d'après la definition de l'indépendance linéaire admet uniquement la solution triviale $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 11 & 3 & 1 \\ 0 & 30 & 15 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -22 & -11 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 11 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 30 & 15 & 3 \\ 0 & -22 & -11 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 22L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - 30L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{11}{15} L_3} \begin{pmatrix} 1 & 11 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Comme le rang de la matrice est égal à 4, les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{w}_1$ et $\vec{e}_1$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, une base de $\mathbb{R}^4$ est donnée par :

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1, \vec{e}_1\} = \{(1,-3,0,2),(11,-3,2,0),(3,6,1,-5),(1,0,0,0)\}.$$

Exercice 18.

Rappel 3. On rappel que la formule de Grassmann pour les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est donnée par :

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U\cap V),$$

où U et V sont des sous-espaces vectoriels de E.

Comme U et V sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, on peut appliquer la formule de Grassmann pour calculer la dimension de la somme $U+V$:

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U\cap V).$$

Sachant que $\dim(U) = \dim(V) = n-1$, on a :

$$\dim(U+V) = (n-1) + (n-1) - \dim(U\cap V) = 2n - 2 - \dim(U\cap V).$$

D'autre part, comme $U+V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, sa dimension ne peut pas dépasser n. Ainsi, on a :

$$\dim(U+V) \leq n.$$

En combinant les deux inégalités, on obtient :

$$2n - 2 - \dim(U\cap V) \leq n,$$

d'où

$$n - 2 \leq \dim(U \cap V).$$

Cette inégalité montre que la dimension de l'intersection $U \cap V$ est au moins égale à $n-2$.

Exercice 20.

> **Rappel 4.** Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On rappel que la somme de deux sous-espaces vectoriels est le sous-espace vectoriel défini par :
>
> $$F + G = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}.$$
>
> De plus, la somme $F+G$ est dite directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$. Dans ce cas, on note $F \oplus G$ la somme directe de F et G.

(20.1) Soit $f \in E$. On commence par vérifier que $f_p \in P$. Pour faire cela, il faut montrer que f_p est paire, c'est-à-dire que $f_p(-x) = f_p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} f_p(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ &= f_p(x). \end{aligned}$$

De même, on vérifie que $f_i \in I$. Pour cela, il faut montrer que f_i est impaire, c'est-à-dire que $f_i(-x) = -f_i(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} f_i(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) \\ &= \frac{1}{2}(-f(x) + f(-x)) \\ &= -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\ &= -f_i(x). \end{aligned}$$

(20.2) Soit $f \in E$. En utilisant les définitions de f_p et f_i, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f_p(x) + f_i(x) &= \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)) \\ &= \frac{1}{2}(2f(x)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $f \in E$, il existe $f_p \in P$ et $f_i \in I$ tels que $f = f_p + f_i$. Ainsi, $E \subseteq P + I$. Il est clair que toute application de la forme $f_p + f_i$ avec $f_p \in P$ et $f_i \in I$ appartient à E, donc $P + I \subseteq E$. Par conséquent, on a l'égalité $E = P + I$.

(20.3) Pour montrer que $E = P \oplus I$, il suffit de vérifier que $P \cap I = \{0\}$. Soit $f \in P \cap I$. Alors, f est à la fois paire et impaire. Comme f est paire, on a :

$$f(x) = f(-x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En utilisant le fait que f est impaire, on obtient :

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En combinant les deux égalités précédentes, on obtient :

$$2f(x) = f(-x) - f(-x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que f est la fonction nulle. Ainsi, $P \cap I = \{0\}$ et par conséquent, $E = P \oplus I$.

Exercice 23.

> **Rappel 5.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors, tout ensemble de plus de n éléments de E est linéairement dépendant.

Considérons l'ensemble $S = \{I_n, A, A^2, A^3, \ldots\}$ des puissances de la matrice A. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie n^2, il existe un entier naturel p (par exemple $p = n^2$) tel que les matrices $I_n, A, A^2, \ldots, A^p$ soient linéairement dépendantes (il s'agit d'un ensemble de plus de n^2 éléments dans un espace vectoriel de dimension n^2). Par conséquent, il existe des réels $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$, pas tous nuls, tels que :

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_p A^p = \Theta.$$

Exercice 27.

(27.1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $(A+B)^t = A^t + B^t$, il suffit de vérifier que les coefficients de ces deux matrices sont égaux pour tout i et j. En effet, on a :

$$((A+B)^t)_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij}.$$

De même, pour montrer que $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$, on vérifie que les coefficients de ces deux matrices sont égaux pour tout i et j :

$$((\alpha A)^t)_{ij} = (\alpha A)_{ji} = \alpha A_{ji} = \alpha(A^t)_{ij}.$$

Enfin, pour montrer que $(A^t)^t = A$, on vérifie que les coefficients de ces deux matrices sont égaux pour tout i et j :

$$((A^t)^t)_{ij} = (A^t)_{ji} = A_{ij}.$$

(27.2) Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour montrer que $(AB)^t = B^t A^t$, il suffit de vérifier que les coefficients de ces deux matrices sont égaux pour tout i et j. En effet, on a :

$$((AB)^t)_{ij} = \underbrace{(AB)_{ji}}_{\substack{\text{Produit scalaire de la} \\ \text{ligne } j \text{ de } A \text{ avec} \\ \text{la ligne } i \text{de } B}} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (A^t)_{kj} (B^t)_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (B^t)_{ik} (A^t)_{kj} = (B^t A^t)_{ij}.$$

(27.3) Soit S l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques. Pour montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il suffit de vérifier que S est fermé par addition et par multiplication par un scalaire. Soient $A, B \in S$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B,$$
$$(\alpha A)^t = \alpha(A^t) = \alpha A.$$

Par conséquent, $A + B \in S$ et $\alpha A \in S$, ce qui montre que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $n = 3$, une base de S est donnée par les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, ces matrices sont symétriques et forment une famille libre de S. De plus, tout élément de S peut être écrit comme une combinaison linéaire de ces matrices : considerons une matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$. On peut écrire A comme une combinaison linéaire des matrices de la base :

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(27.4) Soit S' l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétriques. Pour montrer que S' est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il suffit de vérifier que S' est fermé par addition et par multiplication par un scalaire. Soient $A, B \in S'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

$$(A+B)^t = A^t + B^t = -A - B = -(A+B),$$

$$(\alpha A)^t = \alpha(A^t) = \alpha(-A) = -\alpha A.$$

Par conséquent, $A + B \in S'$ et $\alpha A \in S'$, ce qui montre que S' est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $n = 3$, une base de S' est donnée par les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, ces matrices sont antisymétriques et forment une famille libre de S'. De plus, tout élément de S' peut être écrit comme une combinaison linéaire de ces matrices : considérons une matrice antisymétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

On peut écrire A comme une combinaison linéaire des matrices de la base :

$$A = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(27.5) Pour montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus S'$, il suffit de vérifier que $S + S' = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $S \cap S' = \{0\}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut écrire A comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique de la manière suivante :

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t).$$

En effet, la matrice $\frac{1}{2}(A + A^t)$ est symétrique car :

$$\left(\frac{1}{2}(A + A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t),$$

et la matrice $\frac{1}{2}(A - A^t)$ est antisymétrique car :

$$\left(\frac{1}{2}(A - A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t).$$

Par conséquent, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $S \in S$ et $S' \in S'$ tels que $A = S + S'$. Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S + S'$. Il est clair que la matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique, donc $0 \in S \cap S'$. Supposons qu'il existe une matrice $A \in S \cap S'$. Alors, A est à la fois symétrique et antisymétrique. En utilisant le fait que A est symétrique, on a :

$$A^t = A.$$

En utilisant le fait que A est antisymétrique, on a :

$$A^t = -A.$$

En combinant les deux égalités précédentes, on obtient :

$$2A = A + A = A^t - A^t = 0,$$

d'où $A = 0$. Par conséquent, $S \cap S' = \{0\}$ et par conséquent, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus S'$.