ALGÈBRE LINÉAIRE

FICHE 5 : APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier.

(1) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -4x \end{array}$

(2) $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 7x+2 \end{array}$

(3) $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -5x^2 \end{array}$

(4) $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,\, y) & \longmapsto & 7x-3y \end{array}$

(5) $l : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(5-2X) \end{array}$

(6) $m : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & (X^2+1)P(X) \end{array}$

(7) $c : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^2 \end{array}$

(8) $p : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & -A+2\mathrm{I}_3 \end{array}$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :
$f(\vec{v}) = (x+y, y+z, x+y+z)$ pour tout $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que f est linéaire.
(2) L'application f est-elle bijective? Si oui, déterminer f^{-1}.

Exercice 3. (1) Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par :
$f(P(X)) = P'(X) \quad \forall\, P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$. ($P'(X)$ étant le polynôme dérivé de $P(X)$)
  (a) Montrer que f est linéaire.
  (b) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}(f)$, préciser une base de chacun et leur dimension.

(2) Soit $g : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par :
$g(P(X)) = P'(X) - P(1)$ pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$.
  (a) g est-elle linéaire?
  (b) Montrer, sans calculs, que l'ensemble $\{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(X) = P(1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par :
$\varphi(P(X)) = P(X) - (X-2)P'(X)$ pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.

(1) Montrer que φ est linéaire.
(2) Dans le cas $n = 2$, déterminer une base de $\ker \varphi$.
(3) On considère le cas général $n \geq 2$.
  (a) Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, puis $\varphi(X^p)$ pour $2 \leq p \leq n$. En déduire une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
  (b) Déterminer une base de $\ker(\varphi)$.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On note $\vec{v} = (x, y, z, t)$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

On rappelle que $l_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ est l'application donnée par : $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^4,\ l_A(\vec{v}) = A\,\vec{v}$, autrement dit : $l_A(X) = AX$ pour tout $X \in \mathbb{R}^4$.

(1) Montrer que l_A est une application linéaire.

(2) Déterminer une base de $\ker(l_A)$ et une base de $\mathrm{Im}(l_A)$.

Exercice 6. Mêmes questions que dans l'exercice précédent en prenant les matrices:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ puis } \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.

Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Im}(l_A) = \mathrm{Vec}\{\vec{v}\}$.

Exercice 8. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^5$ suivants :

$\vec{v}_1 = (1, 2, -4, 3, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 5, -3, 4, 8)$, $\vec{v}_3 = (6, 17, -7, 10, 22)$ et $\vec{v}_4 = (1, 3, -3, 2, 0)$.

Déterminer une base de $\mathrm{Vec}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, et donner une relation de dépendance entre $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$.

Exercice 9.

Soient $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui satisfait aux conditions suivantes:

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2;\ \ \varphi(\vec{e}_2) = -\vec{f}_1 + \vec{f}_2;\ \ \varphi(\vec{e}_3) = \vec{f}_1 + 3\vec{f}_2 + 2\vec{f}_3;\ \ \varphi(\vec{e}_4) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3.$$

(1) Justifier brièvement pourquoi ces conditions suffisent pour définir φ.

(2) Donner la matrice A telle que $\varphi = l_A$.

(3) Déterminer une base de $\ker\varphi$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(4) L'application φ est-elle surjective? est-elle injective? Justifiez vos réponses.

Exercice 10. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1; \quad \varphi(\vec{e}_2) = \varphi(\vec{e}_3) = \frac{1}{2}(\vec{e}_2 + \vec{e}_3).$$

(1) Donner la matrice A telle que $\varphi = l_A$.

(2) Déterminer une base de $\ker\varphi$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(3) Montrer que $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. Soient V un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$, et f une application linéaire de V dans V. Montrer l'équivalence suivante:

$$\mathrm{Im}(f) = \ker(f) \quad \Longleftrightarrow \quad (f \circ f = 0,\ n \text{ est pair et } \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f) = \frac{n}{2}).$$

Exercice 12.

Le but de cet exercice est de montrer que le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de coefficients $(a_{i,j})$.
On note $l_1, \dots, l_m$ les lignes de A et $c_1, \dots, c_n$ ses colonnes.

(1) Montrer que $\mathrm{rg}(A) \leq n$ et $\mathrm{rg}(A) \leq m$. Montrer de même que $\mathrm{rg}(A^t) \leq n$ et $\mathrm{rg}(A^t) \leq m$.
(2) Si $\mathrm{rg}(A^t) < m$, on choisit une ligne k qui est linéairement dépendante des autres.
Soit $A' \in \mathcal{M}_{m-1,n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en supprimant cette ligne de A.
Montrer que $\mathrm{rg}(A^t) = \mathrm{rg}(A'^t)$.
(3) Soit $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^{m-1}$ l'application qui supprime la k-ième coordonnée.
Considérons $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vec}\{c_1, \dots, c_n\}$. Montrer que $f_{|\mathrm{Im}(A)}$ est injective.
(4) En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$.
(5) Soit $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue à partir de A en répétant l'étape (2).
Montrer que $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A)$ et $p = \mathrm{rg}(B^t) = \mathrm{rg}(A^t)$.
(6) En déduire que $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(B^t)$ et conclure.

Exercice 13.

Échelonner les matrices suivantes en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes uniquement (et pas sur les colonnes).
En déduire le rang de chaque matrice A puis la dimension de son noyau $\left(\dim\big(\ker(l_A)\big)\right)$.
Préciser une base de $\mathrm{Im}(l_A)$ puis une base de $\ker(l_A)$ (sauf pour la dernière matrice avec paramètre m; pour cette dernière, discuter son rang selon les valeurs du paramètre m et ne pas chercher ces bases):

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 1 \end{pmatrix}$