ALGÈBRE LINÉAIRE
FICHE DE TD 5 : APPLICATIONS LINÉAIRES

Applications Linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier.

(1.1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -4x$

(1.2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 7x + 2$

(1.3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -5x^2$

(1.4) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 7x - 3y$

(1.5) $l : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto P(5 - 2X)$

(1.6) $m : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto (X^2 + 1)P(X)$

(1.7) $c : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A \mapsto A^2$

(1.8) $p : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A \mapsto -A + 2I_3$

→ Correction

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$f(\vec{v}) = (x + y, y + z, x + y + z) \quad \text{pour tout } \vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(2.1) Montrer que f est linéaire.

(2.2) L'application f est-elle bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}.

→ Correction

Exercice 3.

(3.1) Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par :

$$f(P(X)) = P'(X) \quad \forall P(X) \in \mathbb{R}_3[X]. \quad (P'(X) \text{ étant le polynôme dérivé de } P(X))$$

(a) Montrer que f est linéaire.

(b) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}(f)$, préciser une base de chacun et leur dimension.

(3.2) Soit $g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par :

$$g(P(X)) = P'(X) - P(1) \quad \text{pour tout } P(X) \in \mathbb{R}_3[X].$$

(a) g est-elle linéaire ?

(b) Montrer, sans calculs, que l'ensemble $\{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(X) = P(1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

→ Correction

Exercice 4. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$\varphi(P(X)) = P(X) - (X - 2)P'(X) \quad \text{pour tout } P(X) \in \mathbb{R}_n[X].$$

(4.1) Montrer que φ est linéaire.

(4.2) Dans le cas $n = 2$, déterminer une base de $\ker \varphi$.

(4.3) On considère le cas général $n \geq 2$.

(a) Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, puis $\varphi(X^p)$ pour $2 \leq p \leq n$. En déduire une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(b) Déterminer une base de $\ker(\varphi)$.

→ Correction

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On note $\vec{v} = (x, y, z, t)$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

On rappelle que $l_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est l'application donnée par : $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^4$, $l_A(\vec{v}) = A\vec{v}$, autrement dit : $l_A(X) = AX$ pour tout $X \in \mathbb{R}^4$.

(5.1) Montrer que l_A est une application linéaire.

(5.2) Déterminer une base de $\ker(l_A)$ et une base de $\mathrm{Im}(l_A)$.

→ Correction

Exercice 6. Mêmes questions que dans l'exercice précédent en prenant les matrices :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{puis} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

→ Correction

Exercice 7. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Im}(l_A) = \mathrm{Vect}\{\vec{v}\}$.

→ Correction

Exercice 8. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^5$ suivants :

$$\vec{v}_1 = (1, 2, -4, 3, 1), \quad \vec{v}_2 = (2, 5, -3, 4, 8), \quad \vec{v}_3 = (6, 17, -7, 10, 22) \quad \text{et} \quad \vec{v}_4 = (1, 3, -3, 2, 0).$$

Déterminer une base de $\mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, et donner une relation de dépendance entre $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$.

→ Correction

Exercice 9. Soient $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2; \quad \varphi(\vec{e}_2) = -\vec{f}_1 + \vec{f}_2; \quad \varphi(\vec{e}_3) = \vec{f}_1 + 3\vec{f}_2 + 2\vec{f}_3; \quad \varphi(\vec{e}_4) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3.$$

(9.1) Justifier brièvement pourquoi ces conditions suffisent pour définir φ.

(9.2) Donner la matrice A telle que $\varphi = l_A$.

(9.3) Déterminer une base de $\ker \varphi$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(9.4) L'application φ est-elle surjective ? est-elle injective ? Justifiez vos réponses.

→ Correction

Exercice 10. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1; \quad \varphi(\vec{e}_2) = \varphi(\vec{e}_3) = \frac{1}{2}(\vec{e}_2 + \vec{e}_3).$$

(10.1) Donner la matrice A telle que $\varphi = l_A$.

(10.2) Déterminer une base de $\ker\varphi$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(10.3) Montrer que $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

→ Correction

Exercice 11. Soient V un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$, et f une application linéaire de V dans V. Montrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Im}(f) = \ker(f) \iff \left(f \circ f = 0,\ n \text{ est pair et } \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f) = \frac{n}{2}\right).$$

→ Correction

Exercice 12. Le but de cet exercice est de montrer que le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ de coefficients $(a_{i,j})$. On note $l_1, \dots, l_m$ les lignes de A et $c_1, \dots, c_n$ ses colonnes.

(12.1) Montrer que $\mathrm{rg}(A) \leq n$ et $\mathrm{rg}(A) \leq m$. Montrer de même que $\mathrm{rg}(A^t) \leq n$ et $\mathrm{rg}(A^t) \leq m$.

(12.2) Si $\mathrm{rg}(A^t) < m$, on choisit une ligne k qui est linéairement dépendante des autres. Soit $A' \in \mathcal{M}_{m-1,n}(K)$ la matrice obtenue en supprimant cette ligne de A. Montrer que $\mathrm{rg}(A^t) = \mathrm{rg}(A'^t)$.

(12.3) Soit $f : K^m \to K^{m-1}$ l'application qui supprime la k-ième coordonnée. Considérons $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{c_1, \dots, c_n\}$. Montrer que $f|_{\mathrm{Im}(A)}$ est injective.

(12.4) En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$.

(12.5) Soit $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ la matrice obtenue à partir de A en répétant l'étape (2). Montrer que $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A)$ et $p = \mathrm{rg}(B^t) = \mathrm{rg}(A^t)$.

(12.6) En déduire que $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(B^t)$ et conclure.

→ Correction

Exercice 13. Échelonner les matrices suivantes en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes uniquement (et pas sur les colonnes). En déduire le rang de chaque matrice A puis la dimension de son noyau ($\dim\ker(l_A)$). Préciser une base de $\mathrm{Im}(l_A)$ puis une base de $\ker(l_A)$ (sauf pour la dernière matrice avec paramètre m ; pour cette dernière, discuter son rang selon les valeurs du paramètre m et ne pas chercher ces bases) :

(13.1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(13.2) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(13.3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(13.4) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(13.5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 1 \end{pmatrix}$

→ Correction

Corrections fiche 5 : Applications Linéaires

Exercice 1.

Rappel 1. Une application $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$ est dite linéaire si elle satisfait les propriétés suivantes pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \text{et} \quad f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u}).$$

On va lister des propriétes et résultats utiles concernant les applications linéaires :

- L'application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a $f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$.
- Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$. La réciproque est fausse : il existe des applications $f : E \to F$ telles que $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ mais qui ne sont pas linéaires. La contraposée de cette affirmation est vraie : si $f : E \to F$ est une application telle que $f(\vec{0}_E) \neq \vec{0}_F$, alors f n'est pas linéaire.
- La somme de deux applications linéaires $f, g : E \to F$ est linéaire, et la multiplication d'une application linéaire $f : E \to F$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est également linéaire. Cela fait de l'ensemble des applications linéaires de E dans F un espace vectoriel, noté $\mathcal{L}(E, F)$.
- Toute application linéaire $f : E \to F$ est entièrement déterminée par son action sur une base de E. En d'autres termes, si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E, alors f est déterminée par les images $f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)$.
- Deux applications linéaires $f, g : E \to F$ sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base de E. Autrement dit, si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E, alors $f = g$ si et seulement si $f(\vec{e}_i) = g(\vec{e}_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$.
- Le *noyeau* d'une application linéaire $f : E \to F$ est défini par $\ker(f) = \{\vec{v} \in E \mid f(\vec{v}) = \vec{0}_F\}$, et l'*image* de f est définie par $\mathrm{Im}(f) = \{f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in E\}$. Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement.
- Le théorème du rang énonce que pour une application linéaire $f : E \to F$ entre des espaces vectoriels de dimension finie, on a $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$.
- Une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si $\ker(f) = \{\vec{0}_E\}$, et elle est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$. En conséquence, f est bijective si et seulement si $\ker(f) = \{\vec{0}_E\}$ et $\mathrm{Im}(f) = F$.
- Si $f : E \to F$ est une application linéaire et $\dim(E) = \dim(F) < +\infty$, alors f est injective si et seulement si f est surjective, et dans ce cas f est bijective.

(1.1) L'application f est linéaire. En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\alpha x + \beta y) = -4(\alpha x + \beta y) = \alpha(-4x) + \beta(-4y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

(1.2) L'application g n'est pas linéaire. En effet, pour $x = 0$ et $y = 1$ on a :

$$g(x+y) = g(1) = 7 \cdot 1 + 2 = 9 \neq 11 = 2 + 9 = (7(0)+2) + (7(1)+2) = g(x) + g(y).$$

(1.3) L'application h n'est pas linéaire. En effet, pour $x = 1$ et $y = 2$ on a :

$$h(x+y) = h(3) = -5 \cdot 3^2 = -45 \neq -25 = -5 \cdot 1^2 + (-5) \cdot 2^2 = h(x) + h(y).$$

(1.4) L'application k est linéaire. En effet, pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} k(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)) &= k((\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)) \\ &= 7(\alpha x_1 + \beta x_2) - 3(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ &= \alpha(7x_1 - 3y_1) + \beta(7x_2 - 3y_2) \\ &= \alpha k(x_1, y_1) + \beta k(x_2, y_2). \end{aligned}$$

(1.5) L'application l est linéaire. En effet, pour tous $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} l(\alpha P(X) + \beta Q(X)) &= (\alpha P + \beta Q)(5-2X) \\ &= \alpha P(5-2X) + \beta Q(5-2X) \\ &= \alpha l(P(X)) + \beta l(Q(X)). \end{aligned}$$

(1.6) L'application m est linéaire. En effet, pour tous $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} m(\alpha P(X) + \beta Q(X)) &= (X^2+1)(\alpha P(X) + \beta Q(X)) \\ &= \alpha (X^2+1)P(X) + \beta (X^2+1)Q(X) \\ &= \alpha m(P(X)) + \beta m(Q(X)). \end{aligned}$$

(1.7) L'application c n'est pas linéaire. En effet, pour $A = I_3$ et $B = 2I_3$, on a :

$$c(A+B) = c(3I_3) = 9I_3 \neq 5I_3 = A^2 + B^2 = c(A) + c(B).$$

(1.8) L'application p n'est pas linéaire. En effet, pour $A = 0$ et $B = I_3$, on a :

$$p(A+B) = p(I_3) = I_3 \neq 3I_3 = 2I_3 + I_3 = p(A) + p(B).$$

Exercice 2.

(2.1) Pour montrer que f est linéaire, considerons deux vecteurs $\vec{v} = (x,y,z)$ et $\vec{w} = (x', y', z')$ de $\mathbb{R}^3$, et deux scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= f((\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')) \\ &= ((\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y'), (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z'), (\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z')) \\ &= \alpha(x+y, y+z, x+y+z) + \beta(x'+y', y'+z', x'+y'+z') \\ &= \alpha f(\vec{v}) + \beta f(\vec{w}). \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire.

(2.2) Pour déterminer si f est bijective, il suffit de vérifier si f est injective ou surjective (car f est une application linéaire entre des espaces vectoriels de même dimension, voir Rappel 1). Calculons le noyau de f :

$$\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\}.$$

Donc, on veut trouver les solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on peut faire la différence entre la troisième équation et la première, ce qui donne $z = 0$. Ensuite, en substituant $z = 0$ dans la deuxième équation, on trouve $y = 0$. Enfin, en substituant $y = 0$ dans la première équation, on trouve $x = 0$. Ainsi, $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$, ce qui montre que f est injective. Par conséquent, f est bijective. On va déterminer f^{-1}. Soit $\vec{w} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On cherche $\vec{v} = (x,y,z)$ tel que $f(\vec{v}) = \vec{w}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

En faisant la différence entre la troisième équation et la première, on trouve $z = c - a$. Ensuite, en substituant $z = c - a$ dans la deuxième équation, on trouve $y = b - z = b - (c - a) = a + b - c$. Enfin, en substituant $y = a + b - c$ dans la première équation, on trouve $x = a - y = a - (a + b - c) = c - b$. Ainsi, pour tout $\vec{w} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$f^{-1}(a,b,c) = (c-b, a+b-c, c-a).$$

Exercice 3.

(3.1) (a) Pour montrer que f est linéaire, considérons deux polynômes $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ et deux scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(\alpha P(X) + \beta Q(X)) = (\alpha P + \beta Q)'(X) = \alpha P'(X) + \beta Q'(X) = \alpha f(P(X)) + \beta f(Q(X)).$$

où la deuxième égalité découle de la linéarité de l'opération de dérivation sur les polynômes. Ainsi, f est linéaire.

(b) Le noyau de f est l'ensemble des polynômes de degré au plus 3 dont la dérivée est nulle, c'est-à-dire les polynômes constants. Donc, $\ker f = \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ est un scalaire}\}$. Une base de $\ker f$ est donc $\{1\}$, et $\dim(\ker f) = 1$. L'image de f est le sous-espace :

$$\mathrm{Im}(f) = \{P'(X) \mid P(X) \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{Q(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid Q(X) \text{ est de degré au plus 2}\} = \mathbb{R}_2[X].$$

En effet, si Q est un polynôme qui appartient à $\mathrm{Im}(f)$, alors il existe un polynôme $P(X) = a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$ tel que $Q(X) = P'(X) = a_1+2a_2X+3a_3X^2$, ce qui montre que $Q(X)$ appartient à $\mathrm{Vec}(1, X, X^2)$. Réciproquement, si $Q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2$ est un polynôme de degré au plus 2, alors il existe un polynôme $P(X) = c_0 + b_0X + \frac{b_1}{2}X^2 + \frac{b_2}{3}X^3$ tel que $P'(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 = Q(X)$, ce qui montre que $Q(X)$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$. Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donc $\{1, X, X^2\}$, et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.

(3.2) (a) L'application g est linéaire. En effet, pour tous $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
g(\alpha P(X) + \beta Q(X)) &= (\alpha P + \beta Q)'(X) - (\alpha P + \beta Q)(1) \\
&= \alpha P'(X) + \beta Q'(X) - \alpha P(1) - \beta Q(1) \\
&= \alpha(P'(X) - P(1)) + \beta(Q'(X) - Q(1)) \\
&= \alpha g(P(X)) + \beta g(Q(X)).
\end{aligned}$$

(b) On peut montrer que l'ensemble $\{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(X) = P(1)\}$ est un sous-espace vectoriel simplement en remarquant que cet ensemble est le noyau de l'application linéaire g. En effet :

$$\begin{aligned}
\ker(g) &= \{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid g(P(X)) = 0\} \\
&= \{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(X) - P(1) = 0\} \\
&= \{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(X) = P(1)\}.
\end{aligned}$$

Comme le noyau d'une application linéaire est toujours un sous-espace vectoriel, on conclut que l'ensemble $\{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(X) = P(1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4.

(4.1) Pour montrer que φ est linéaire, considérons deux polynômes $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ et deux scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi((\alpha P + \beta Q)(X)) &= (\alpha P + \beta Q)(X) - (X-2)(\alpha P + \beta Q)'(X) \\
&= \alpha P(X) + \beta Q(X) - (X-2)(\alpha P'(X) + \beta Q'(X)) \\
&= \alpha(P(X) - (X-2)P'(X)) + \beta(Q(X) - (X-2)Q'(X)) \\
&= \alpha\varphi(P(X)) + \beta\varphi(Q(X)).
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire.

(4.2) Dans le cas $n = 2$, un polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$ appartient à $\ker\varphi$ si et seulement si $\varphi(P(X)) = 0$, c'est-à-dire :

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 - (X-2)(a_1 + 2a_2X) = 0.$$

En développant, on trouve :

$$(a_0 + 2a_1) + (a_1 - a_1 + 4a_2)X + (a_2 - 2a_2)X^2 = (a_0 + 2a_1) + 4a_2X - a_2X^2 = 0.$$

Cette égalité est vérifiée si et seulement si :

$$\begin{cases} a_0 + 2a_1 = 0 \\ 4a_2 = 0 \\ -a_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $a_2 = 0$ et $a_0 = -2a_1$. Ainsi, les polynômes de la forme $-2a_1 + a_1X = a_1(X-2)$ appartiennent à $\ker\varphi$. Une base de $\ker\varphi$ est donc $\{X-2\}$.

(4.3) (a) Soit $n \geq 2$. Calculons $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, puis $\varphi(X^p)$ pour $2 \leq p \leq n$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 1 - (X-2)\cdot 0 = 1, \\ \varphi(X) &= X - (X-2)\cdot 1 = 2, \\ \varphi(X^p) &= X^p - (X-2)\cdot pX^{p-1} = X^p - pX^p + 2pX^{p-1} = (1-p)X^p + 2pX^{p-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 1 - (X-2)\cdot 0 = 1, \\ \varphi(X) &= X - (X-2)\cdot 1 = 2\cdot\varphi(1), \\ \varphi(X^2) &= -X^2 + 4X, \\ \varphi(X^3) &= -2X^3 + 6X^2, \\ &\vdots \\ \varphi(X^n) &= (1-n)X^n + 2nX^{n-1}. \end{aligned}$$

On note que les polynômes $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(X) = 2$ sont linéarement dépendants car $\varphi(X) = 2\varphi(1)$. De plus le degrée de $\varphi(X^p)$ est égal à p pour tout $2 \leq p \leq n$. Ainsi, les polynômes $\varphi(X^2), \dots, \varphi(X^n)$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ est donnée par l'ensemble $\{\varphi(1), \varphi(X^2), \dots, \varphi(X^n)\}$, et $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n$. Notons que l'ensemble $\{\varphi(X), \varphi(X^2), \dots, \varphi(X^n)\}$ est aussi une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(b) Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ et $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n$, le théorème du rang implique que $\dim(\ker(\varphi)) = 1$. On avait déjà montré que le polynôme $X-2$ appartient à $\ker(\varphi)$ dans le cas $n = 2$. En fait, on peut vérifier que $X-2$ appartient à $\ker(\varphi)$ pour tout $n \geq 2$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(X-2) &= (X-2) - (X-2)\cdot 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme $\dim(\ker(\varphi)) = 1$ et que $X-2$ appartient à $\ker(\varphi)$, on conclut que $\{X-2\}$ est une base de $\ker(\varphi)$.

Exercice 5.

> **Rappel 2.** Lorsque on a une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on peut définir une application linéaire $l_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ par $l_A(X) = AX$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. Le noyau de l_A est l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $AX = 0$, et l'image de l_A est l'ensemble des vecteurs de la forme AX pour $X \in \mathbb{R}^n$. Le théorème du rang énonce que $\dim(\ker(l_A)) + \dim(\mathrm{Im}(l_A)) = n$, où n est le nombre de colonnes de la matrice A.
>
> Pour trouver une base de $\ker(l_A)$, on peut résoudre le système d'équations linéaires $AX = 0$. Des vecteurs d'un base de $\ker(l_A)$ peuvent être trouvés en utilisant la méthode d'élimination de Gauss pour réduire la matrice A à une forme échelonnée, puis en exprimant les variables libres en fonction des variables de base. Pour trouver une base de $\mathrm{Im}(l_A)$, il suffit de noter que l'image de l_A correspond à l'espace engendré par les colonnes de la matrice A. Ainsi, une base de $\mathrm{Im}(l_A)$ peut être obtenue en sélectionnant les colonnes de A qui correspondent aux variables de base dans une forme échelonnée de A.

(5.1) L'application l_A est linéaire. En effet, pour tous $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} l_A(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= A(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) \\ &= \alpha A\vec{v} + \beta A\vec{w} \\ &= \alpha l_A(\vec{v}) + \beta l_A(\vec{w}). \end{aligned}$$

(5.2) Pour déterminer une base de $\ker(l_A)$, on commence par noter que un vecteur $\vec{v} = (x, y, z, t)$ appartient à $\ker(l_A)$ si et seulement si $A\vec{v} = \vec{0}$, c'est-à-dire si et seulement si le système d'équations linéaires suivant est satisfait :

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 3x + 3z - 2t = 0 \\ 5x - y + 4z - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On va résoudre ce système d'équations linéaires pour trouver une base de $\ker(l_A)$. On procède par élimination de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2-2L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3-3L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4-5L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4-2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3-L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ainsi, le système d'équations linéaires équivalent à $A\vec{v} = \vec{0}$ est :

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ -3y - 3z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 2z + t \\ y = -z + \frac{t}{3} \end{cases}.$$

En exprimant les variables de base x et y en fonction des variables libres z et t, on trouve que tout vecteur de $\ker(l_A)$ est de la forme :

$$\vec{v} = (-y - 2z + t, -z + \frac{t}{3}, z, t) = z(-2, -1, 1, 0) + t(1, \frac{1}{3}, 0, 1).$$

Ainsi, une base de $\ker(l_A)$ est donnée par les vecteurs $(-2, -1, 1, 0)$ et $(1, \frac{1}{3}, 0, 1)$, et $\dim(\ker(l_A)) = 2$. Pour déterminer une base de $\mathrm{Im}(l_A)$, on note que l'image de l_A correspond à l'espace engendré par les colonnes de la matrice A. En effet, supposons que $Y = (a, b, c, d)$ appartient à $\mathrm{Im}(l_A)$. Alors, il existe un vecteur $X = (x, y, z, t)$ tel que $AX = Y$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z - t = a \\ 2x - y + z - t = b \\ 3x + 3z - 2t = c \\ 5x - y + 4z - 3t = d \end{cases} \Leftrightarrow x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour trouver une base de $\mathrm{Im}(l_A)$, il suffit de trouver les colonnes de A qui sont linéairement indépendantes. Pour cela, on peut réduire la matrice A à une forme échelonnée. On a déjà effectué les opérations élémentaires sur les lignes de A pour trouver une base de $\ker(l_A)$, et on a trouvé la forme échelonnée suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de A qui correspondent aux variables de base dans cette forme échelonnée sont les colonnes 1 et 2. Ainsi, une base de $\mathrm{Im}(l_A)$ est donnée par les vecteurs suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(l_A)) = 2$.

Exercice 6. La preuve que l_B et l_C sont des applications linéaires est similaire à la preuve que l_A est une application linéaire dans l'exercice précédent. De même, la méthode pour trouver une base de $\ker(l_B)$, $\mathrm{Im}(l_B)$, $\ker(l_C)$ et $\mathrm{Im}(l_C)$ est similaire à la méthode utilisée pour trouver une base de $\ker(l_A)$ et $\mathrm{Im}(l_A)$.

(1) On va commencer par échelonner la matrice B pour trouver une base de $\ker(l_B)$ et $\mathrm{Im}(l_B)$. On a :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le système d'équations linéaires équivalent à $B\vec{v} = \vec{0}$ est :

$$\begin{cases} -x + 2y + z + t = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 3z - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ t = z \\ x = 2y + z + t = 2(-z) + z + z = 0 \end{cases}.$$

En exprimant les variables de base x et y en fonction de la variable libre z, on trouve que tout vecteur de $\ker(l_B)$ est de la forme :

$$\vec{v} = (0 - z, z, z) = z(0, -1, 1, 1).$$

Ainsi, une base de $\ker(l_B)$ est donnée par le vecteur $(0, -1, 1, 1)$, et $\dim(\ker(l_B)) = 1$. Pour trouver une base de $\mathrm{Im}(l_B)$, on note que les colonnes de B qui correspondent aux variables de base dans la forme échelonnée de B sont les colonnes 1, 2 et 3. Ainsi, une base de $\mathrm{Im}(l_B)$ est donnée par les vecteurs suivants :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(l_B)) = 3$. Notons que $\dim(\ker(l_B)) + \dim(\mathrm{Im}(l_B)) = 1 + 3 = 4$, ce qui est égal au nombre de colonnes de la matrice B (dimension du domaine de l_B), conformément au théorème du rang.

(2) On va échelonner la matrice C pour trouver une base de $\ker(l_C)$ et $\mathrm{Im}(l_C)$. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le système d'équations linéaires équivalent à $C\vec{v} = \vec{0}$ est :

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -y - 4z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 3z \\ y = -4z \\ z = 0 \end{cases}.$$

On trouve alors que $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$. Ainsi, $\ker(l_C) = \{\vec{0}\}$, une base de $\ker(l_C)$ est donnée par le vecteur nul, et $\dim(\ker(l_C)) = 0$. Pour trouver une base de $\mathrm{Im}(l_C)$, on note que les colonnes de C qui correspondent aux variables de base dans la forme échelonnée de C sont les colonnes 1, 2 et 3. Ainsi, une base de $\mathrm{Im}(l_C)$ est donnée par les vecteurs suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(l_C)) = 3$. Notons que $\dim(\ker(l_C)) + \dim(\mathrm{Im}(l_C)) = 0 + 3 = 3$, ce qui est égal au nombre de colonnes de la matrice C (dimension du domaine de l_C), conformément au théorème du rang.

Exercice 7. Soit $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On peut choisir une matrice A de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont la seule colonne non nulle est le vecteur $\vec{v}$. Par exemple, on peut choisir la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}),$$

où m est un entier positif quelconque. Alors, pour tout vecteur $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, on a :

$$l_A(X) = AX = \begin{pmatrix} v_1x_1 \\ v_2x_1 \\ \vdots \\ v_nx_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = x_1\vec{v}.$$

Ainsi, l'image de l_A est l'ensemble des vecteurs de la forme $x_1\vec{v}$ pour $x_1 \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\mathrm{Im}(l_A) = \mathrm{Vect}\{\vec{v}\}$.

Exercice 8. Pour déterminer une base de $\mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, on peut échelonner la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 17 & 3 \\ -4 & -3 & -7 & -3 \\ 3 & 4 & 10 & 2 \\ 1 & 8 & 22 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & -3 & -7 & -3 \\ 3 & 4 & 10 & 2 \\ 1 & 8 & 22 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 3 & 4 & 10 & 2 \\ 1 & 8 & 22 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -1 \\ 1 & 8 & 22 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_5 \leftarrow L_5 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -1 \\ 0 & 6 & 16 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & -2 & -8 & -1 \\ 0 & 6 & 16 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 16 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_5 \leftarrow L_5 - 6L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_5 \leftarrow L_5 + 7L_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 4L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une base de $\mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ est donnée par les vecteurs suivants :

$$\vec{v}_1 = (1, 2, -4, 3, 1), \quad \vec{v}_2 = (2, 5, -3, 4, 8) \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = (6, 17, -7, 10, 22).$$

Pour trouver une relation de dépendance entre $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$, on peut résoudre le système d'équations linéaires correspondant à $AX = \vec{0}$ où A est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$. Comme on a déjà échelonné la matrice A, on a un système d'équations linéaires équivalent à $AX = \vec{0}$ donné par :

$$\begin{cases} x + 2y + 6z + t = 0 \\ y + 5z + t = 0 \\ 2z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 6z - t \\ y = -5z - t \\ z = -\frac{t}{2} \end{cases}.$$

En exprimant les variables de base x, y et z en fonction de la variable libre t, on trouve que

$$y = -5z - t = -5\left(-\frac{t}{2}\right) - t = \frac{5t}{2} - t = \frac{3t}{2}$$

et

$$x = -2y - 6z - t = -2\left(\frac{3t}{2}\right) - 6\left(-\frac{t}{2}\right) - t = -3t + 3t - t = -t.$$

Ainsi, une relation de dépendance entre $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ est donnée par :

$$-t\vec{v}_1 + \frac{3t}{2}\vec{v}_2 - \frac{t}{2}\vec{v}_3 + t\vec{v}_4 = \vec{0}$$

ou encore

$$-2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - \vec{v}_3 + 2\vec{v}_4 = \vec{0}.$$

Exercice 9.

(9.1) Les conditions données dans l'énoncé spécifient l'image de chaque vecteur de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ par l'application linéaire φ. Par ce qui a été vu dans le cours, une application linéaire est entièrement déterminée par son action sur une base du domaine. En effet, pour tout vecteur $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, on peut écrire :

$$X = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4,$$

et alors (comme φ est linéaire) on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4)\\
&= x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2) + x_3\varphi(\vec{e}_3) + x_4\varphi(\vec{e}_4)\\
&= x_1(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) + x_2(-\vec{f}_1 + \vec{f}_2) + x_3(\vec{f}_1 + 3\vec{f}_2 + 2\vec{f}_3) + x_4(\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3)\\
&= (x_1 - x_2 + x_3 + x_4)\vec{f}_1 + (x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4)\vec{f}_2 + (2x_3 + x_4)\vec{f}_3.\\
&= (x_1 - x_2 + x_3 + x_4)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (2x_3 + x_4)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(9.2) La matrice A telle que $\varphi = l_A$ est donnée par la matrice ci-dessus, c'est-à-dire :

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Une autre façon de trouver la matrice A est de noter que les colonnes de A sont les images des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ par l'application linéaire φ. Autrement dit :

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \varphi(\vec{e}_1) & \varphi(\vec{e}_2) & \varphi(\vec{e}_3) & \varphi(\vec{e}_4) \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

(9.3) Pour trouver une base de $\ker\varphi$, on a déjà vu que cela revient à trouver une base pour le sous-espace vectoriel de solutions du système d'équations linéaires $AX = \vec{0}$, où A est la matrice trouvée à la question précédente. On peut échelonner la matrice A pour trouver une base de $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ (on rappel que le sous-espace $\mathrm{Im}(\varphi)$ est donnée par le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de A et ainsi une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ est donnée par les colonnes de A qui correspondent aux variables de base dans la forme échelonnée de A). On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrix est donc échelonnée. Ainsi, le système d'équations linéaires équivalent à $AX = \vec{0}$ est :

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ y + z = 0 \\ 2z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z - t \\ y = -z \\ z = -\frac{t}{2} \end{cases}.$$

En exprimant les variables de base x et y et z en fonction de la variable libre t, on trouve que

$$y = -z = -\left(-\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2}$$

et

$$x = y - z - t = \frac{t}{2} - \left(-\frac{t}{2}\right) - t = 0.$$

Ainsi, tout vecteur $\vec{v}$ de $\ker(\varphi)$ est de la forme :

$$\vec{v} = (0, \frac{t}{2}, -\frac{t}{2}, t) = t(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1).$$

Ainsi, une base de $\ker(\varphi)$ est donnée par le vecteur $(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$, et $\dim(\ker(\varphi)) = 1$. Pour trouver une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$, on note que les colonnes de A qui correspondent aux variables de base dans la forme échelonnée de A sont les colonnes 1, 2 et 3. Ainsi, une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ est donnée par les vecteurs suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 3$. Notons que $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1 + 3 = 4$, ce qui est égal au nombre de colonnes de la matrice A (dimension du domaine de φ), conformément au théorème du rang.

(9.4) L'application φ n'est pas injective car $\ker(\varphi) \neq \{\vec{0}\}$ (en effet, $\dim(\ker(\varphi)) = 1$). L'application φ est surjective car $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^3$ (en effet, $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 3$, ce qui est égal à la dimension du codomaine de φ). Or, le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 est $\mathbb{R}^3$ lui-même. Ainsi, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 13.

(13.1) En échelonnant la matrice A, on trouve que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le rang de A est égal à 3 (car il y a 3 lignes non nulles dans la forme échelonnée de A ou il y a trois pivots), et par le théorème du rang $\dim \ker(l_A) = 5 - 3 = 2$. Une base de $\mathrm{Im}(l_A)$ est donnée par les vecteurs suivants (ce sont les colonnes de A qui correspondent aux pivots de la forme échelonnée de A) :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour trouver une base de $\ker(l_A)$, on peut résoudre le système d'équations linéaires équivalent à $AX = \vec{0}$ donné par (en utilisant la forme échelonnée de A) :

$$\begin{cases} x + 2y - 4z - 2t - u = 0 \\ -2y + 4z + 2t = 0 \\ 2u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 4z + 2t + u \\ y = 2z + t \\ u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(2z + t) + 4z + 2t = 0 \\ y = 2z + t \\ u = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, tout vecteur (x, y, z, t, u) de $\ker(l_A)$ est de la forme :

$$(x, y, z, t, u) = (0, 2z + t, z, t, 0) = z(0, 2, 1, 0, 0) + t(0, 1, 0, 1, 0).$$

Alors, une base de $\ker(l_A)$ est donnée par les vecteurs suivants :

$$(0, 2, 1, 0, 0) \quad \text{et} \quad (0, 1, 0, 1, 0).$$

(13.2) La procédure est similaire à celle de la question précédente. En échelonnant la matrice A, on trouve que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 15 & 5 & 15 \\ 0 & 9 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 9 & 3 & 9 \\ 0 & 15 & 5 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 5L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le rang de A est égal à 2 (car il y a 2 lignes non nulles dans la forme échelonnée de A ou il y a deux pivots), et par le théorème du rang $\dim \ker(l_A) = 4 - 2 = 2$. Une base de $\mathrm{Im}(l_A)$ est donnée par les vecteurs suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour trouver une base de $\ker(l_A)$, on peut résoudre le système d'équations linéaires équivalent à $AX = \vec{0}$ donné par (en utilisant la forme échelonnée de A) :

$$\begin{cases} x + 7y + 2z + 5t = 0 \\ -3y - z - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7y - 2z - 5t \\ y = -\frac{1}{3}z - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7\left(-\frac{1}{3}z - t\right) - 2z - 5t = \frac{1}{3}z + 7t \\ y = -\frac{1}{3}z - t \end{cases}.$$

Ainsi, tout vecteur (x, y, z, t) de $\ker(l_A)$ est de la forme :

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{3}z + 7t, -\frac{1}{3}z - t, z, t\right) = z\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right) + t(7, -1, 0, 1).$$

Alors, une base de $\ker(l_A)$ est donnée par les vecteurs suivants :

$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right) \quad \text{et} \quad (7, -1, 0, 1).$$

(13.3) Encore une fois, la procédure est similaire à celle des questions précédentes. En échelonnant la matrice A, on trouve que :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 7L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -14 & 2 & -15 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 0 & -14 & 2 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 14L_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -26 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow{L_4+13L_3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le rang de A est égal à 4 (car il y a 4 lignes non nulles dans la forme échelonnée de A ou il y a quatre pivots), et par le théorème du rang $\dim\ker(l_A) = 4-4 = 0$. Une base de $\mathrm{Im}(l_A)$ est donnée par tous les vecteurs correspondant aux colonnes de A (car il y a un pivot dans chaque colonne) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

En fait, cela implique aussi que $\dim\mathrm{Im}(l_A) = 4$, ce qui est égal à la dimension du codomaine de l_A. Ainsi, $\mathrm{Im}(l_A) = \mathbb{R}^4$. La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est donc aussi une base de $\mathrm{Im}(l_A)$. Enfin, comme $\dim\ker(l_A) = 0$, alors $\ker(l_A) = \{\vec{0}\}$, et la base de $\ker(l_A)$ est donnée par le vecteur nul $\vec{0}$.

(13.4) La procédure est similaire à celle des questions précédentes. En échelonnant la matrice A, on trouve que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+2L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 11 & 0 & 5 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & -8 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+\frac{8}{11}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{15}{11} & \frac{85}{11} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le rang de A est égal à 3 (car il y a 3 lignes non nulles dans la forme échelonnée de A ou il y a trois pivots), et par le théorème du rang $\dim\ker(l_A) = 5-3 = 2$. Une base de $\mathrm{Im}(l_A)$ est donnée par les vecteurs suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour trouver une base de $\ker(l_A)$, on peut résoudre le système d'équations linéaires équivalent à $AX = \vec{0}$ donné par (en utilisant la forme échelonnée de A) :

$$\begin{cases} x+4y-z+2t+4u = 0 \\ 11y+5t+12u = 0 \\ -z-\frac{15}{11}t+\frac{85}{11}u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y+z-2t-4u \\ y = -\frac{5}{11}t-\frac{12}{11}u \\ z = -\frac{15}{11}t+\frac{85}{11}u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{17}{11}t+\frac{89}{11}u \\ y = -\frac{5}{11}t-\frac{12}{11}u \\ z = -\frac{15}{11}t+\frac{85}{11}u \end{cases}.$$

Ainsi, tout vecteur (x, y, z, t, u) de $\ker(l_A)$ est de la forme :

$$(x,y,z,t,u) = \left(-\frac{17}{11}t+\frac{89}{11}u, -\frac{5}{11}t-\frac{12}{11}u, -\frac{15}{11}t+\frac{85}{11}u, t, u\right) = t\left(-\frac{17}{11}, -\frac{5}{11}, -\frac{15}{11}, 1, 0\right) + u\left(\frac{89}{11}, -\frac{12}{11}, \frac{85}{11}, 0, 1\right).$$

Alors, une base de $\ker(l_A)$ est donnée par les vecteurs suivants :

$$(-17,-5,-15,1,0) \quad \text{et} \quad (89,-12,85,0,1).$$

(13.5) En échelonnant la matrice A, on trouve que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2\leftarrow L_2-mL_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & m+1 & -1 & -m-1 \\ 0 & -m+1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & m+1 & -1 & -m-1 \\ 0 & 2 & 0 & -m-2 \\ 0 & 0 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -m-2 \\ 0 & m+1 & -1 & -m-1 \\ 0 & 0 & m & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{m+1}{2} L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -m-2 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{(m+1)(m)}{2} \\ 0 & 0 & m & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + mL_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -m-2 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{(m+1)(m)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m^2(m+1)}{2} \end{pmatrix}.$$

On va discuter le rang de A et les bases correspondantes de $\mathrm{Im}(l_A)$ et $\ker(l_A)$ selon les valeurs du paramètre m :

- Si $m = 0$, alors la forme échelonnée de la matrice A devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Ainsi, le rang de A est égal à 3 (car il y a 3 lignes non nulles dans la forme échelonnée de A ou il y a trois pivots), et par le théorème du rang $\dim \ker(l_A) = 4 - 3 = 1$. Une base de $\mathrm{Im}(l_A)$ est donnée par les vecteurs suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Enfin, pour trouver une base de $\ker(l_A)$, on peut résoudre le système d'équations linéaires équivalent à $AX = \vec{0}$ donné par (en utilisant la forme échelonnée de A) :

$$\begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2y - 2t = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - t = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}.$$

  Ainsi, tout vecteur (x, y, z, t) de $\ker(l_A)$ est de la forme :

$$(x, y, z, t) = (0, t, 0, t) = t\,(0, 1, 0, 1).$$

  Alors, une base de $\ker(l_A)$ est donnée par le vecteur suivant :

$$(0, 1, 0, 1).$$

- Si $m = -1$, alors la forme échelonnée de la matrice A devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Encore, le rang de A est égal à 3 (car il y a 3 lignes non nulles dans la forme échelonnée de A ou il y a trois pivots), et par le théorème du rang $\dim \ker(l_A) = 4 - 3 = 1$. Une base de $\mathrm{Im}(l_A)$ est donnée par les vecteurs suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

  Enfin, pour trouver une base de $\ker(l_A)$, on peut résoudre le système d'équations linéaires équivalent à $AX = \vec{0}$ donné par (en utilisant la forme échelonnée de A) :

$$\begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2y - t = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - t \\ y = \frac{t}{2} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{t}{2} - t = -\frac{t}{2} \\ y = \frac{t}{2} \\ z = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, tout vecteur (x, y, z, t) de $\ker(l_A)$ est de la forme :

$$(x, y, z, t) = \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, 0, t\right) = \frac{t}{2}\,(-1, 1, 0, 2)\,.$$

Alors, une base de $\ker(l_A)$ est donnée par le vecteur suivant :

$$(-1, 1, 0, 2)\,.$$

- Si $m \neq 0$ et $m \neq -1$, alors la forme échelonnée de la matrice A devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -m-2 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{(m+1)(m)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m^2(m+1)}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le rang de A est égal à 4 (car il y a 4 lignes non nulles dans la forme échelonnée de A ou il y a quatre pivots), et par le théorème du rang $\dim\ker(l_A) = 4-4 = 0$. Une base de $\mathrm{Im}(l_A)$ est donnée par tous les vecteurs correspondant aux colonnes de A (car il y a un pivot dans chaque colonne) :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -m \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En fait, cela implique aussi que $\dim\mathrm{Im}(l_A) = 4$, ce qui est égal à la dimension du codomaine de l_A. Ainsi, $\mathrm{Im}(l_A) = \mathbb{R}^4$. La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est donc aussi une base de $\mathrm{Im}(l_A)$. Enfin, comme $\dim\ker(l_A) = 0$, alors $\ker(l_A) = \{\vec{0}\}$, et la base de $\ker(l_A)$ est donnée par le vecteur nul $\vec{0}$.