ALGÈBRE LINÉAIRE

FICHE 6 : INVERSE D'UNE MATRICE CARRÉE CHANGEMENTS DE BASES

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Par la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, d'inconnue (x, y, z), en considérant u, v et w comme paramètres.

b. En déduire que A est inversible. Ecrire son inverse A^{-1}.

c. Résoudre les systèmes d'équations suivants, en se servant des résultats précédents :

$$(SE_1) \begin{cases} -x - y - 2z &= 1 \\ 2x + 2y + 5z &= 2 \\ x + 2y + 3z &= 3 \\ x + y + 4z &= 7 \end{cases} \qquad (SE_2) \begin{cases} -x - y - 2z &= 1 \\ 2x + 2y + 5z &= 2 \\ x + 2y + 3z &= 3 \\ -x + 2026y + z &= 4 \end{cases}$$

Exercice 2. Calculer l'inverse de chacune des matrices suivantes en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes uniquement (et pas sur les colonnes):
idée : effectuer des opérations élémentaires pour transformer A en la matrice Identité et effectuer les mêmes opérations élémentaires sur la matrice Identité pour obtenir A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soient $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $f(\vec{v})$ pour tout $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(2) Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{e'}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e'}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ et $\vec{e'}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.
Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Donner la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$.

(4) Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $\vec{f'}_1 = \frac{1}{2}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2)$ et $\vec{f'}_2 = \frac{1}{2}(\vec{f}_1 - \vec{f}_2)$.

  (a) Montrer que $\mathcal{C}' = (\vec{f'}_1, \vec{f'}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

  (b) Calculer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{e'}_1 = (1;1;0)$, $\vec{e'}_2 = (0;0;1)$ et $\vec{e'}_3 = (1;0;1)$.

(1) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer la matrice $\underset{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbb{M}at}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, càd la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$ (2 méthodes).

(3) En déduire les coordonnées du vecteur $\vec{v} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 5. Soient V un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur $\mathbb{R}$, et f une application linéaire de V dans V. On suppose qu'il existe un vecteur $\vec{v} \in V$ non nul tel que :
$f^i(\vec{v}) \neq \vec{0}_V$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $f^n(\vec{v}) = \vec{0}_V = \vec{0}$.

(1) Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{v}, f(\vec{v}), \cdots, f^{n-1}(\vec{v}))$ est une base de V.

(2) Donner la matrice $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbb{M}at}(f)$.

Exercice 6. Soient

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{b'}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + 3\vec{b}_3, \qquad \vec{b'}_2 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3 \quad \text{et} \quad \vec{b'}_3 = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3.$$

(1) Vérifier que $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{b'}_1, \vec{b'}_2, \vec{b'}_3)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbb{M}at}(f)$$

la matrice d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.
Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, autrement dit expliciter $\underset{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}'}{\mathbb{M}at}(f)$.

Exercice 7. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Donner l'image de $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par l'application linéaire $u = l_A$.

(2) En déduire que A est inversible.

(3) Etudier l'image de $\mathcal{B}$ par u^n pour trouver la matrice A^n.

(4) En déduire la matrice A^{-1}.

Exercice 8. Calculer l'inverse de chacune des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels suivantes : *dans la première matrice, les coefficients $a_1, \dots, a_n$ sont tous supposés non nuls*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_2 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \dots & & 1 \\ 0 & 1 & & \dots & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$