

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET OPTIMISATION

SANTIAGO TORO OQUENDO

RÉSUMÉ. Ces notes accompagnent le cours d'équations différentielles et d'optimisation. On y étudie les équations différentielles ordinaires (existence, unicité, solutions maximales, systèmes linéaires, stabilité), puis les bases de l'optimisation continue (convexité, conditions d'optimalité, algorithmes de descente). Version préliminaire, en cours de rédaction.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	1
1. Introduction aux équations différentielles	2
1.1. Motivation	2
1.2. Exemples d'équations différentielles	2
1.3. Difficultés et enjeux	4
1.4. Exemples et terminologie.	5
1.5. Théorie générale des équations différentielles	8
2. Les équations différentielles du premier ordre	9
2.1. Les équations à variables séparables	9
2.2. Les équations exactes et les facteurs intégrants.	12
2.3. Les équations linéaires et l'équation de Bernoulli	15
2.4. Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre	18
2.5. Équations non linéaires du premier ordre	19
2.6. Théorème de Cauchy-Lipschitz : existence locale et globale	27
3. Les équations linéaires du deuxième ordre	32
3.1. Équations linéaires d'ordre supérieur	32
3.2. Solution des équations linéaires non homogènes d'ordre n avec coefficients constants	34
4. Équations différentielles linéaires d'ordre n	36
4.1. Équations linéaires homogènes à coefficients constants.	36
4.2. Équations linéaires non-homogènes à coefficients constants	36
5. Systèmes d'équations différentielles	37
6. Solution numérique des équations différentielles	38
6.1. Méthode d'Euler	38
6.2. Méthode de Heun	38
6.3. Méthode de Runge-Kutta.	38

Brouillon — à compléter.

AVANT-PROPOS

Ces notes accompagnent le cours *Équations différentielles et optimisation* (Semestre 1). Elles rassemblent les définitions, les énoncés et les démonstrations vus en cours, ainsi que des exemples et des exercices. Il s'agit d'une version préliminaire, susceptible d'être modifiée et complétée au fil du semestre.

Brouillon — à compléter.

1. INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1.1. Motivation

Une équation différentielle est une équation qui relie une variable réelle t (appelée le temps), une fonction inconnue $x(t)$ (appelée l'état du système) à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et ses dérivées $x'(t)$, $x''(t)$, ... On peut la voir comme une loi d'évolution du système, qui décrit comment l'état du système change au cours du temps. Souvent, ces équations sont écrites sous la forme :

$$(1.1) \quad x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)),$$

où $x^{(n)}(t)$ est la dérivée d'ordre n de x par rapport à t , et f est une fonction donnée qui dépend du temps, de l'état du système et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$. La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est donnée.

Remarque 1.2. L'ordre d'une équation différentielle est le plus grand ordre de dérivée qui apparaît dans l'équation. Par exemple, si l'équation différentielle est de la forme $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$, alors l'ordre de l'équation est 2 car la dérivée d'ordre 2 (c'est-à-dire $x''(t)$) est la plus grande dérivée qui apparaît dans l'équation.

Souvent, ces équations sont munies de *conditions initiales* ou *conditions de bord*. Par exemple, les valeurs des dérivées de x jusqu'à l'ordre $n-1$ à un instant initial t_0 sont données :

$$(1.3) \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1},$$

où $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont des vecteurs donnés dans $\mathbb{R}^m$. L'objectif est de trouver l'ensemble des fonctions $x(t)$ qui satisfont à la fois l'équation différentielle (1.1) et les conditions initiales (1.3). On peut également considérer d'autres types de questions :

- (1) **Détermination de l'ensemble des solutions :** On peut chercher, pour $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ donnés, l'ensemble des fonctions $x(t)$ qui satisfont à la fois l'équation différentielle (1.1) et les conditions initiales (1.3).
- (2) **Comportement qualitatif :** Si l'on peut déterminer l'ensemble des solutions, on peut ensuite s'intéresser à leur comportement qualitatif. Par exemple, on peut chercher à savoir si les solutions sont bornées, si elles convergent vers un point d'équilibre, si elles présentent des oscillations ou si elles sont définies sur tout $\mathbb{R}$ ou seulement sur un intervalle.
- (3) **Approximation des solutions :** Si l'on ne peut pas calculer explicitement les solutions, on peut chercher à les approcher par des méthodes numériques. Cela peut être fait en utilisant des méthodes d'intégration numérique, telles que la méthode d'Euler ou la méthode de Runge-Kutta, pour obtenir des approximations des solutions à différents instants de temps.

Dans ce cours, nous allons nous concentrer sur les équations différentielles ordinaires (EDO), c'est-à-dire les équations différentielles qui ne dépendent que d'une seule variable indépendante (le temps t). Nous allons étudier les concepts fondamentaux liés aux EDO, tels que l'existence et l'unicité des solutions, la stabilité des solutions, ainsi que les méthodes d'approximation numérique.

1.2. Exemples d'équations différentielles

L'étude des équations différentielles est motivée par de nombreux exemples provenant de la physique, de la biologie, de l'économie et d'autres domaines. Voici quelques exemples classiques d'équations différentielles :

1.2.1. Un objet en chute libre. Supposons qu'un objet soit en chute libre dans l'atmosphère terrestre. On notera t le temps écoulé depuis le début de la chute (en secondes) et $v(t)$ la vitesse de l'objet à l'instant t (en mètres par seconde). La loi physique qui régit le mouvement de l'objet est donnée par la deuxième loi de Newton, qui stipule que la force exercée sur un objet est égale à sa masse multipliée par son accélération. On exprime cette loi par l'équation

$$(1.4) \quad F = ma(t),$$

où F est la force exercée sur l'objet (en newtons), m est la masse de l'objet (en kilogrammes) et $a(t)$ est l'accélération de l'objet (en mètres par seconde carrée) à l'instant t . Rappelons que l'accélération

est reliée à la vitesse par la relation $a(t) = v'(t)$, où $v'(t)$ est la dérivée de la vitesse par rapport au temps. Ainsi, l'équation (1.4) peut être réécrite sous la forme

$$(1.5) \quad F = m \frac{dv}{dt}.$$

Lorsque l'objet est en chute libre, il existe deux forces qui agissent sur lui : la force de la gravité, qui est dirigée vers le bas et a une valeur de mg , où g est l'accélération due à la gravité (environ $9,81 \text{ m/s}^2$), et la force de résistance de l'air, qui est généralement modélisée comme étant proportionnelle à la vitesse de l'objet et dirigée vers le haut. Ainsi, la force totale exercée sur l'objet est donnée par

$$(1.6) \quad F = mg - kv(t).$$

Notons qu'on considère ici un référentiel dont la direction positive est vers le bas. En combinant les équations (1.5) et (1.6), on obtient l'équation différentielle suivante pour la vitesse de l'objet en chute libre :

$$(1.7) \quad m \frac{dv}{dt} = mg - kv(t).$$

Cette équation différentielle est un modèle mathématique qui décrit le mouvement d'un objet en chute libre dans l'atmosphère terrestre près du niveau de la mer. Dans ce modèle, on a trois constantes m , g et k . Pour résoudre cette équation, on doit trouver la fonction $v(t)$ qui satisfait à l'équation différentielle (1.7). Pour l'instant, on va fixer des valeurs spécifiques pour les paramètres m , g et k et on va étudier le comportement des solutions sans chercher à les calculer explicitement. Posons par exemple $m = 10 \text{ kg}$, $k = 2 \text{ kg/s}$ et $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. L'équation différentielle devient alors

$$(1.8) \quad \frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}.$$

Ensuite, on peut évaluer le membre de droite de l'équation (1.8) pour différentes valeurs de v afin de comprendre le comportement de la vitesse au cours du temps. Par exemple, si $v = 40$, alors $dv/dt = 1,8$. Cela signifie que la pente d'une solution $v(t)$ à l'instant où $v = 40$ est positive et vaut 1.8. On peut représenter graphiquement cette information en traçant un champ de directions, qui est un ensemble de petites flèches indiquant la direction et la pente des solutions en différents points du plan (t, v) .

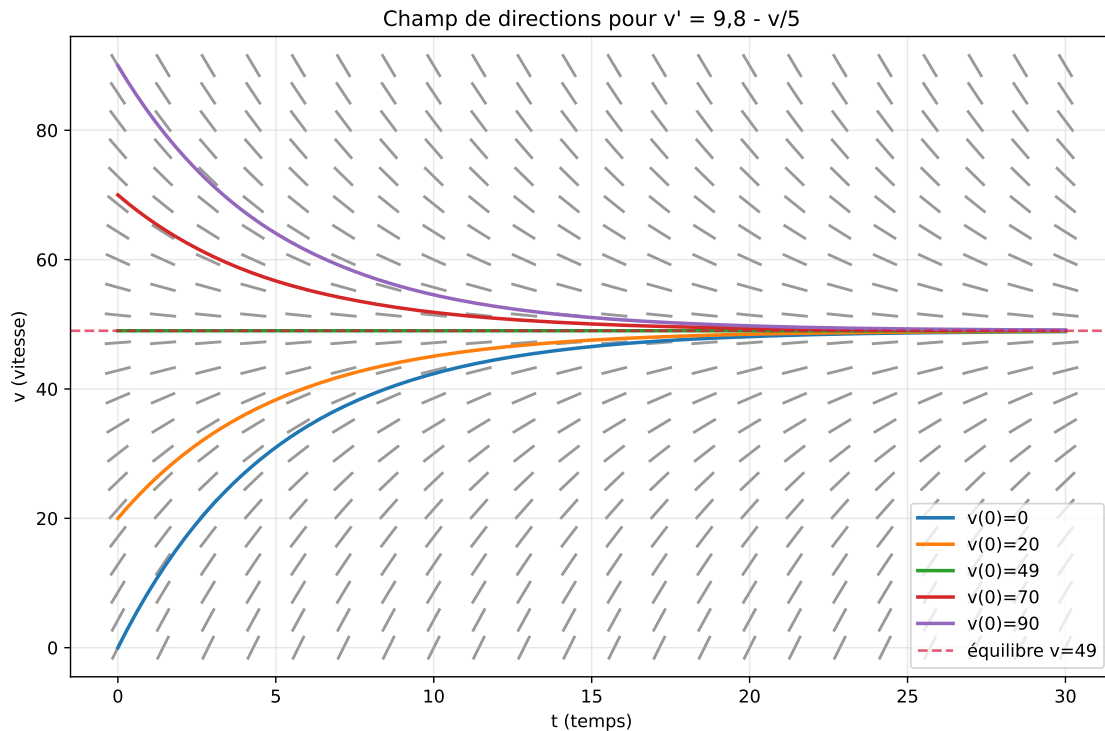


FIGURE 1. Champ de directions pour $\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}$.

L'importance de cette figure réside dans le fait que chaque segment de droite est une droite tangente à une solution de l'équation différentielle. Ainsi, on peut tirer des conclusions qualitatives sur le comportement des solutions. Par exemple, si v est inférieur à 49, alors dv/dt est positif, ce qui signifie que la vitesse augmente. Si v est supérieur à 49, alors dv/dt est négatif, ce qui signifie que la vitesse diminue. Ainsi, on peut conclure que la vitesse de l'objet en chute libre tend vers une valeur limite de 49 m/s au fil du temps, indépendamment de la vitesse initiale. Notons que $v(t) = 49$ est une solution particulière de l'équation différentielle (1.8), appelée *solution stationnaire* ou *point d'équilibre*. En effet, si $v(t) = 49$, alors $dv/dt = 0$, ce qui signifie que la vitesse ne change pas au fil du temps.

1.2.2. Modèles de Malthus et de Verhulst. On considère une population d'individus dont la taille à l'instant t est notée $N(t)$: une fonction à valeurs réelles $N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Dans le modèle de Malthus, on suppose que la population croît à un taux proportionnel à sa taille actuelle. Autrement dit, on suppose que le taux instantané de naissance (resp. de décès) dans la population est constant et égal à b (resp. d). Ainsi, la variation de la population entre deux instants t et $t + \Delta t$ est donnée par

$$(1.9) \quad N(t + \Delta t) - N(t) = (b - d)N(t)\Delta t.$$

La relation (1.9) n'est qu'une approximation : elle suppose que l'effectif N et les taux b et d restent constants sur tout l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, ce qui n'est acceptable que lorsque Δt est petit. On écrit donc plutôt $N(t + \Delta t) - N(t) = (b - d)N(t)\Delta t + o(\Delta t)$, puis on divise par Δt :

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (b - d)N(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

En supposant N dérivable et en faisant tendre Δt vers 0, le membre de gauche tend vers $N'(t)$ et le dernier terme vers 0. On arrive donc à l'équation différentielle suivante pour la population $N(t)$:

$$(1.10) \quad \frac{dN}{dt} = rN(t),$$

où $r = b - d$ est le taux de croissance net de la population. Cette équation différentielle est un modèle simple de croissance exponentielle de la population, qui prédit que la population croît sans limite au fil du temps si $r > 0$, ou décroît vers zéro si $r < 0$. On verra plus tard comment résoudre cette équation différentielle et analyser le comportement des solutions. Pour l'instant, on remarque que ce modèle est peu réaliste : il est peu probable qu'une population puisse croître indéfiniment de façon exponentielle. En effet, il faut tenir compte des ressources limitées et de la compétition entre individus. Pour remédier à cette limitation, on peut introduire le modèle de Verhulst, qui prend en compte la capacité de charge de l'environnement. Dans ce modèle, on suppose que le taux de croissance net r diminue lorsque la population approche d'une certaine valeur limite K , appelée la *capacité de charge* (ou *capacité d'accueil*) du milieu. Le modèle de Verhulst est donc donné par l'équation différentielle suivante :

$$(1.11) \quad \frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right).$$

Notons que si $N(t) > K$ alors $dN/dt < 0$, ce qui signifie que la population diminue lorsqu'elle dépasse la capacité de charge. Dans la figure suivante, on peut voir le champ de directions pour l'équation différentielle (1.11) avec $r = 1$ et $K = 1$. On peut observer que les solutions tendent vers la valeur limite $K = 1$ au fil du temps, indépendamment de la population initiale N_0 .

Exercice 1.12. Montrer que l'unique solution de l'équation différentielle (1.11) avec la condition initiale $N(0) = N_0$ est donnée par

$$(1.13) \quad N(t) = \frac{KN_0 e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}.$$

1.3. Difficultés et enjeux

Il est souvent difficile, voire impossible, de trouver des solutions explicites pour un grand nombre d'équations différentielles. Les classes pour lesquelles on dispose d'une méthode systématique de résolution explicite sont peu nombreuses : les équations à variables séparables, les équations exactes (éventuellement après multiplication par un facteur intégrant), les équations linéaires du premier ordre, les équations linéaires à coefficients constants quel que soit leur ordre, ainsi que certaines équations non linéaires particulières (équation logistique, équation de Bernoulli, équation de Riccati,

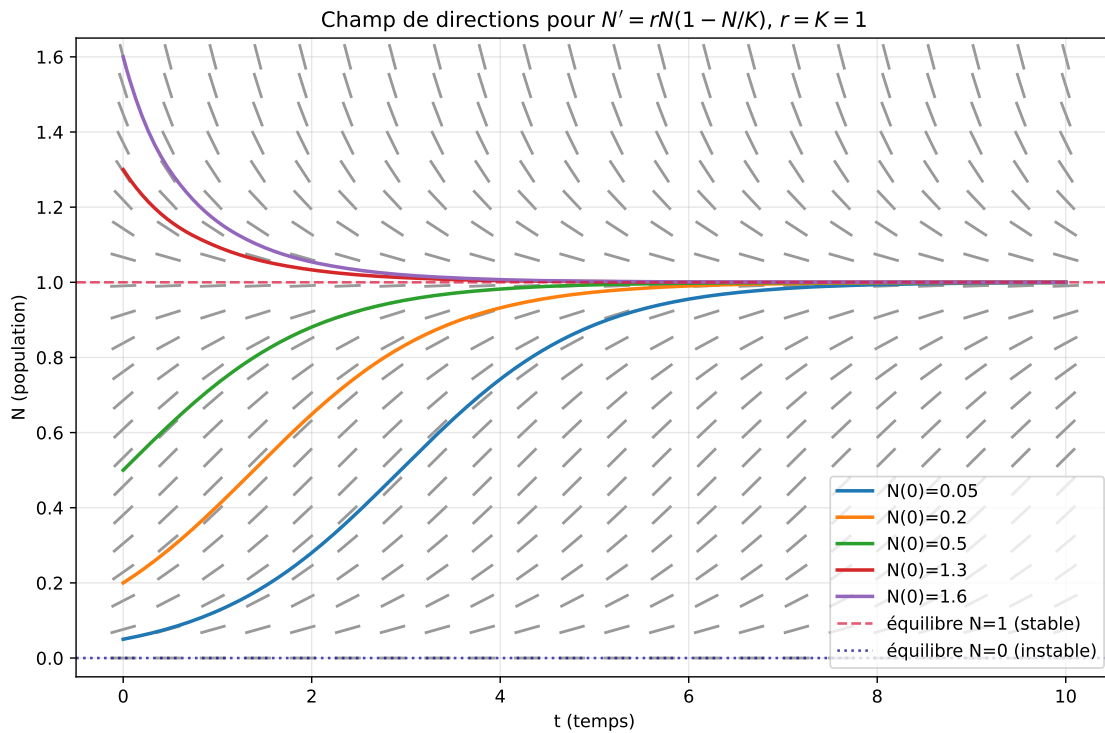


FIGURE 2. Champ de directions pour $\frac{dN}{dt} = rN(1 - N/K)$, avec $r = K = 1$.

etc.). Pour la plupart des équations différentielles, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour obtenir des approximations des solutions. Cependant, même lorsque l'on ne peut pas trouver de solutions explicites, il est souvent possible d'analyser le comportement qualitatif des solutions en utilisant des outils tels que les champs de directions, les points d'équilibre et la stabilité. Ces outils permettent de comprendre comment les solutions évoluent au fil du temps et comment elles réagissent aux perturbations.

1.4. Exemples et terminologie

Voici quelques exemples d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} y''(x) &= y'(x)e^{y(x)} \\ y''(x) &= \sin(y(x)) + y'(x) \\ y'(x) &= f(x) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dy}{dx}e^y \end{aligned}$$

Dans chaque cas, il faut bien comprendre les variables et les fonctions impliquées. Dans le premier exemple, y est une fonction de la variable x , et l'équation relie la dérivée seconde de y à la dérivée première de y et à la fonction exponentielle de y . Dans le deuxième exemple, l'équation relie la dérivée seconde de y à la fonction sinus de y et à la dérivée première de y . Dans le troisième exemple, l'équation relie la dérivée première de y à une fonction donnée $f(x)$. Enfin, dans le quatrième exemple, l'équation relie la dérivée seconde de y à la dérivée première de y et à la fonction exponentielle de y . Notons que la dernière équation est équivalente à la première, mais elle est écrite en notation de Leibniz.

Exemple 1.14 (Solutions maximales). Chacune des solutions de l'équation différentielle $y'(x) = 2x$ est une courbe. On peut facilement remarquer que la fonction $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y_1(x) = x^2$ est une solution de $y'(x) = 2x$. Cependant, la fonction $y_2 : [15, 20] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y_2(x) = x^2$ est également une solution de $y'(x) = 2x$. La différence entre ces deux solutions est que la première est définie sur tout $\mathbb{R}$, tandis que la deuxième est définie seulement sur l'intervalle $[15, 20]$. On dit que la première solution est une *solution maximale*, car elle ne peut pas être prolongée à un intervalle

plus grand. En revanche, la deuxième solution n'est pas maximale, car elle peut être prolongée à tout $\mathbb{R}$ en utilisant la première solution. On s'intéressera toujours aux solutions maximales, c'est-à-dire les solutions qui ne peuvent pas être prolongées à un intervalle plus grand. Il est important de noter que les solutions maximales ne sont pas nécessairement définies sur tout $\mathbb{R}$. Par exemple, les solutions maximales de l'équation différentielle $y'(x) = \ln(x)$ sont définies sur l'intervalle $(0, +\infty)$, car la fonction logarithme n'est pas définie pour les valeurs négatives ou nulles de x .

Exemple 1.15 (Nombre de solutions). Une équation différentielle peut avoir plusieurs solutions maximales. Par exemple, l'équation différentielle $y'(x) = x$ admet une infinité de solutions maximales, qui sont toutes des fonctions de la forme :

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + C,$$

où C est une constante réelle. Chaque valeur de C correspond à une solution maximale différente, et ces solutions sont toutes définies sur tout $\mathbb{R}$. Ainsi, l'équation différentielle $y'(x) = x$ admet une infinité de solutions maximales, qui sont toutes des paraboles translatées verticalement les unes des autres. Par ailleurs, l'équation différentielle $(y'(x))^2 + 1 = 0$ n'admet aucune solution réelle, car $(y'(x))^2 \geq 0$ pour toute fonction dérivable y à valeurs réelles, et donc $(y'(x))^2 + 1 \geq 1 > 0$ en tout point. Il n'est pas toujours aussi évident de déterminer toutes les solutions d'une équation différentielle. Par exemple, l'équation différentielle

$$y'(x) = \sqrt[3]{y(x)}$$

admet plusieurs solutions maximales, toutes définies sur $\mathbb{R}$: la fonction nulle $y \equiv 0$, ainsi que, pour tout $C \in \mathbb{R}$, les deux fonctions

$$y_C^\pm(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq C, \\ \pm \left(\frac{2}{3}(x - C) \right)^{3/2} & \text{si } x \geq C. \end{cases}$$

En particulier, une infinité de solutions passent par le point $(x_0, 0)$, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$: la donnée d'une condition initiale ne suffit donc pas toujours à déterminer une unique solution.

Exemple 1.16 (Problèmes de Cauchy). Un problème de Cauchy consiste à trouver une solution d'une équation différentielle qui satisfait une condition initiale donnée. Par exemple, considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On a déjà vu que l'équation différentielle $y'(x) = x$ admet une infinité de solutions maximales de la forme $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$. Pour trouver la solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$, on remplace x par 0 dans l'expression générale des solutions :

$$y(0) = \frac{0^2}{2} + C = C.$$

Ainsi, pour que la condition initiale soit satisfaite, il faut que $C = 1$. Par conséquent, la solution du problème de Cauchy est donnée par :

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + 1.$$

Cette solution est unique, car il n'existe pas d'autre valeur de C qui permette de satisfaire la condition initiale. En général, un problème de Cauchy peut avoir une solution unique, plusieurs solutions ou aucune solution, selon l'équation différentielle et la condition initiale donnée.

Exemple 1.17 (Domaines de solution). Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

où $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une application différentiable définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$. Le domaine D est appelé le *domaine de définition de l'équation différentielle*. Par exemple, le domaine de définition de l'équation différentielle

$$y'(x) = \ln(x)$$

est $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, car l'application $f(x, y) = \ln(x)$ est définie lorsque $x > 0$. La solution (on verra plus tard comment la trouver) de cette équation différentielle avec la condition initiale $y(1) = 0$ est donnée par

$$y(x) = x \ln(x) - x + 1.$$

Le domaine de la solution est donc $]0, +\infty[$.

1.4.1. Classification des équations différentielles.

Équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles. Une des classifications les plus simples consiste à déterminer si la fonction inconnue (la fonction x dans (1.1)) dépend d'une seule variable ou de plusieurs. Dans le premier cas, on parle d'*équations différentielles ordinaires* (EDO), tandis que dans le second cas, on parle d'*équations aux dérivées partielles* (EDP). Dans ce cours, nous allons nous concentrer sur les EDO. Toutes les équations différentielles que nous avons considérées jusqu'à présent sont des EDO, car elles ne dépendent que d'une seule variable indépendante t (à noter que l'on a utilisé x comme variable indépendante dans les exemples précédents et la fonction inconnue qui dépend de x est notée $y(x)$). On peut bien sûr remplacer x par t pour rester cohérent avec la notation de l'équation (1.1)).

Les systèmes d'équations différentielles. Une autre classification importante consiste à déterminer si l'équation différentielle est une équation scalaire ou un système d'équations différentielles. Une équation différentielle scalaire est une équation qui implique une seule fonction inconnue, tandis qu'un système d'équations différentielles implique plusieurs fonctions inconnues. Par exemple, l'équation différentielle

$$y'(x) = x^2 + y(x)$$

est une équation différentielle scalaire, car elle implique une seule fonction inconnue $y(x)$. En revanche, le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -x(t), \end{cases}$$

est un système d'équations différentielles, car il implique deux fonctions inconnues $x(t)$ et $y(t)$. Dans ce cours, nous allons travailler avec les deux types d'équations différentielles, mais la première partie du cours sera consacrée aux équations différentielles scalaires.

L'ordre. Comme on l'a mentionné précédemment, l'ordre d'une équation différentielle est le plus grand ordre de dérivée qui apparaît dans l'équation. Par exemple, l'équation différentielle

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

est une équation différentielle d'ordre 2, car la dérivée d'ordre 2 (c'est-à-dire $y''(x)$) est la plus grande dérivée qui apparaît dans l'équation. En revanche, l'équation différentielle

$$y'(x) = \sin(x)$$

est une équation différentielle d'ordre 1, car la dérivée d'ordre 1 (c'est-à-dire $y'(x)$) est la plus grande dérivée qui apparaît dans l'équation. Plus généralement, l'équation différentielle

$$(1.18) \quad y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

est une équation différentielle d'ordre n . Notons que, pour l'instant, on a écrit de façon générale les équations différentielles sous la forme (1.18), ce qui suppose que l'on peut isoler la dérivée d'ordre n de la fonction inconnue. Cependant, l'équation différentielle

$$(1.19) \quad F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

où F est une fonction donnée, peut ne pas être résoluble en $y^{(n)}(x)$. Dans ce cas, on dit que l'équation différentielle est *implicite*. On verra plus tard comment traiter les équations différentielles implicites.

Les équations linéaires et non linéaires. L'équation différentielle (1.19) est dite *linéaire* si la fonction F est linéaire par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées, c'est-à-dire par rapport à $(y, y', \dots, y^{(n)})$ (la dépendance en la variable x , elle, est quelconque). Autrement dit, l'équation

différentielle est linéaire si elle peut être écrite sous la forme

$$(1.20) \quad a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x).$$

La linéarité de l'équation différentielle signifie que les coefficients $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ et la fonction $g(x)$ ne dépendent pas de la fonction inconnue $y(x)$ ni de ses dérivées, mais seulement de la variable indépendante x . En revanche, si l'équation différentielle ne peut pas être écrite sous la forme (1.20), alors elle est dite *non linéaire*. Par exemple, l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x)y'(x) = 0$$

est une équation différentielle non linéaire, car le terme $y(x)y'(x)$ est un produit de la fonction inconnue et de sa dérivée. En revanche, l'équation différentielle

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \sin(x)$$

est une équation différentielle linéaire, car elle peut être écrite sous la forme (1.20) avec $a_2(x) = 1$, $a_1(x) = 3$, $a_0(x) = 2$ et $g(x) = \sin(x)$.

Exercice 1.21. Classer les équations différentielles suivantes selon les critères d'ordre, de linéarité et de type (EDO ou EDP). Lorsqu'il n'y a pas de variable indépendante, on considère qu'il s'agit d'une EDO dont la variable indépendante est implicite, à savoir t ou x .

$$(1) \quad t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

$$(3) \quad y^{(4)} + y^{(3)} + y'' + y' + y = 1$$

$$(4) \quad y'' + \sin(x + y) = \sin(x)$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$(5) \quad y''' + ty'' + \cos^2(t)y = t^3$$

1.5. Théorie générale des équations différentielles

Jusqu'à présent, nous avons considéré des équations différentielles *en dimension finie*, c'est-à-dire que la fonction f de (1.1) est définie sur le produit cartésien d'un intervalle I et de n copies de $\mathbb{R}^m$ (ou même d'ouverts de $\mathbb{R}^m$), et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Cependant, on peut considérer des équations différentielles plus générales.

Définition 1.22. Soient E un espace de Banach¹, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $U, U_1, \dots, U_{n-1}$ des ouverts de E . On appelle *équation différentielle* d'ordre n dans E une équation de la forme

$$(1.23) \quad y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)),$$

où $f : I \times U \times U_1 \times \dots \times U_{n-1} \rightarrow E$ est une fonction donnée. On appelle *solution* de l'équation différentielle (1.23) un couple (J, y) , où $J \subseteq I$ est un sous-intervalle de I et $y : J \rightarrow E$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ telle que $(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in U \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}$ et que (1.23) soit satisfaite, pour tout $t \in J$.

Remarque 1.24. Certains cas particuliers de l'équation (1.23) portent un nom.

(1) Lorsque $E = \mathbb{R}$, l'équation différentielle est dite *scalaire*.

(2) Lorsque f est linéaire par rapport à $(u, u', \dots, u^{(n-1)})$, l'équation différentielle est dite *linéaire homogène* (et à *coefficients constants* si de plus f ne dépend pas de t). Si f est de la forme

$$f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}) = g(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}) + b(t),$$

avec g linéaire par rapport à $(u, u', \dots, u^{(n-1)})$, l'équation différentielle est dite *linéaire avec terme source*.

(3) Lorsque f ne dépend pas de t , l'équation différentielle est dite *autonome*.

Dans la suite, nous commencerons par nous concentrer sur différentes méthodes de résolution de certaines équations différentielles du premier ordre : les équations à variables séparables, les équations exactes et les facteurs intégrants, puis les équations linéaires et l'équation de Bernoulli. Il ne s'agit pas encore d'une théorie générale, mais d'un catalogue de situations dans lesquelles on sait mener le calcul jusqu'au bout ; les questions d'existence et d'unicité des solutions dans le cadre décrit ci-dessus seront abordées plus loin.

1. On rappelle qu'un espace de Banach est un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance induite par la norme.

2. LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

Dans cette section, on étudie les équations différentielles du premier ordre, c'est-à-dire les équations de la forme

$$(2.1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où f est une fonction continue sur un domaine ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$.

2.1. Les équations à variables séparables

Il existe une méthode de résolution des équations différentielles du premier ordre lorsque l'équation (2.1) peut s'écrire sous la forme :

$$(2.2) \quad \frac{dy}{dx} = g(x)h(y),$$

où g est une fonction qui dépend uniquement de x et h est une fonction qui dépend uniquement de y .

Remarque 2.3. Dans l'expression précédente, si $h(y_0) = 0$ pour un certain y_0 , alors $y(x) = y_0$ est une solution de l'équation différentielle (2.2).

On va alors supposer que $h(y) \neq 0$ pour tout y dans l'intervalle considéré. On peut alors réécrire l'équation (2.2) sous la forme :

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x),$$

et ainsi séparer les variables x et y . On peut alors intégrer les deux membres de l'équation précédente :

$$(2.4) \quad \int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx.$$

Soient H et G des primitives de $\frac{1}{h}$ et de g respectivement. Comme h est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle considéré, elle y garde un signe constant, et il en va de même de $H' = \frac{1}{h}$: la fonction H y est donc strictement monotone, donc injective, et admet une réciproque H^{-1} définie sur son image. On obtient alors que l'équation (2.4) est équivalente à :

$$H(y(x)) = G(x) + C,$$

où C est une constante réelle. Les solutions de l'équation différentielle (2.2) sont donc données par :

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C),$$

sur tout intervalle où $G(x) + C$ reste dans l'image de H . La constante C est déterminée par la condition initiale lorsqu'on en impose une.

Exemple 2.5. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(2.6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2}.$$

On peut réécrire l'équation (2.6) sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{1 - y^2},$$

et ainsi séparer les variables x et y :

$$(1 - y^2)dy = x^2 dx.$$

On peut alors intégrer (trouver la primitive) les deux membres de l'équation précédente :

$$\begin{aligned} \int (1 - y^2) dy &= \int x^2 dx \\ y - \frac{y^3}{3} &= \frac{x^3}{3} + C \end{aligned}$$

Cette dernière équation est une équation implicite pour y en fonction de x . On peut la réécrire sous la forme ($K = -3C$ est une constante) :

$$y^3 - 3y + x^3 = K.$$

Cette équation décrit une famille de courbes-solutions de l'équation différentielle (2.6). On peut trouver l'équation explicite de la courbe-solution passant par un point (x_0, y_0) en remplaçant x et y par x_0 et y_0 dans l'équation précédente pour trouver la valeur de la constante K . La figure suivante illustre le champ de directions de l'équation différentielle (2.6) ainsi que les courbes-solutions pour différentes valeurs de la constante K .

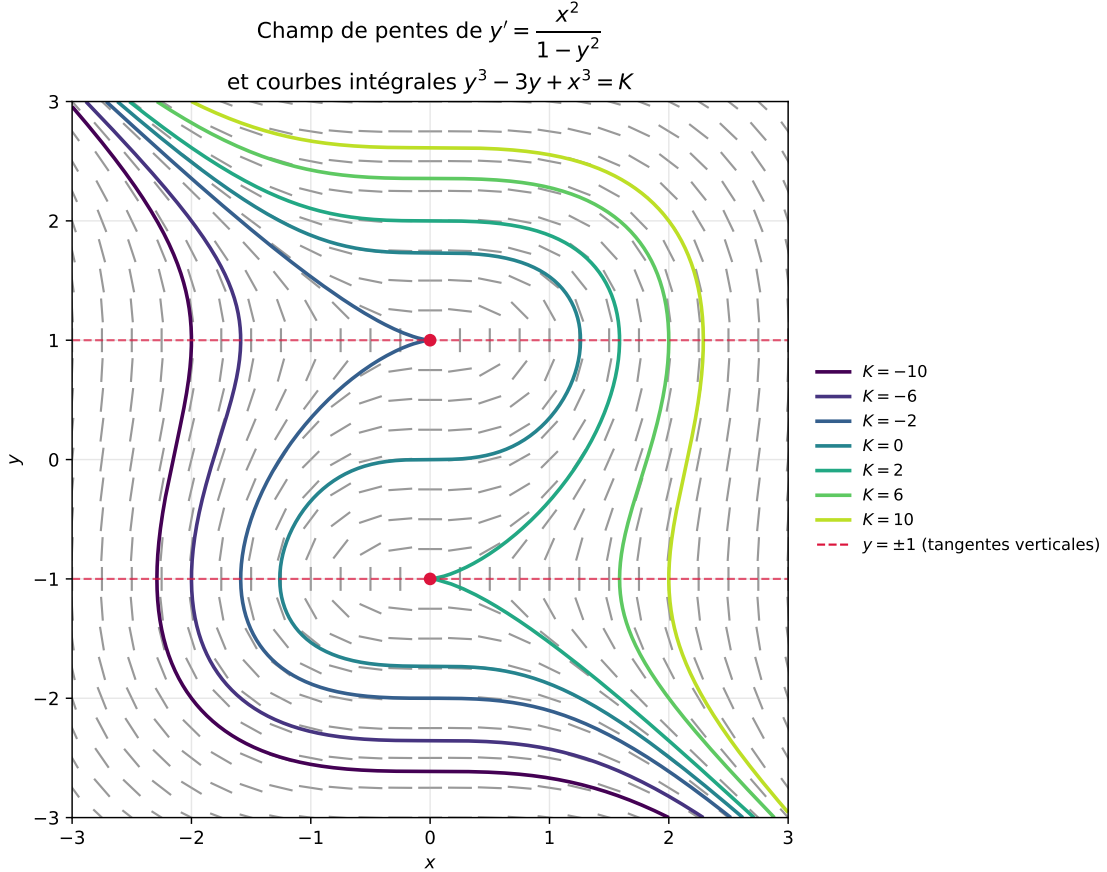


FIGURE 3. Champ de directions de l'équation différentielle (2.6) et courbes-solutions pour différentes valeurs de la constante K .

Notons que l'équation (2.6) est définie sur le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm 1\}$, car la fonction $f(x, y) = \frac{x^2}{1-y^2}$ n'est pas définie pour $y = \pm 1$. Par exemple, lorsqu'il existe un point x_0 tel que $y(x_0) = 1$, le problème de Cauchy associé à l'équation différentielle (2.6) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}, \quad y(x_0) = 1$$

admet deux solutions distinctes. En effet, la même méthode de séparation des variables permet de trouver la relation implicite $y^3 - 3y + x^3 = K$ et la condition initiale $y(x_0) = 1$ permet de déterminer la valeur de la constante K :

$$\begin{aligned} 1^3 - 3 \cdot 1 + x_0^3 &= K \\ K &= x_0^3 - 2 \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions sont portées par la courbe d'équation implicite :

$$y^3 - 3y + x^3 = x_0^3 - 2.$$

Posons $\varphi(y) = y^3 - 3y$, de sorte que cette relation s'écrit $\varphi(y) = u(x)$, où $u(x) = (x_0^3 - 2) - x^3$. Comme $\varphi'(y) = 3(y^2 - 1)$, la fonction φ est croissante sur $(-\infty, -1]$, décroissante sur $[-1, 1]$, puis

croissante sur $[1, +\infty)$, avec $\varphi(-1) = 2$ et $\varphi(1) = -2$. Pour $x < x_0$ on a $u(x) > -2$, et la relation $\varphi(y) = u(x)$ admet alors plusieurs racines : la courbe se décompose en branches, dont *deux* passent par le point $(x_0, 1)$.

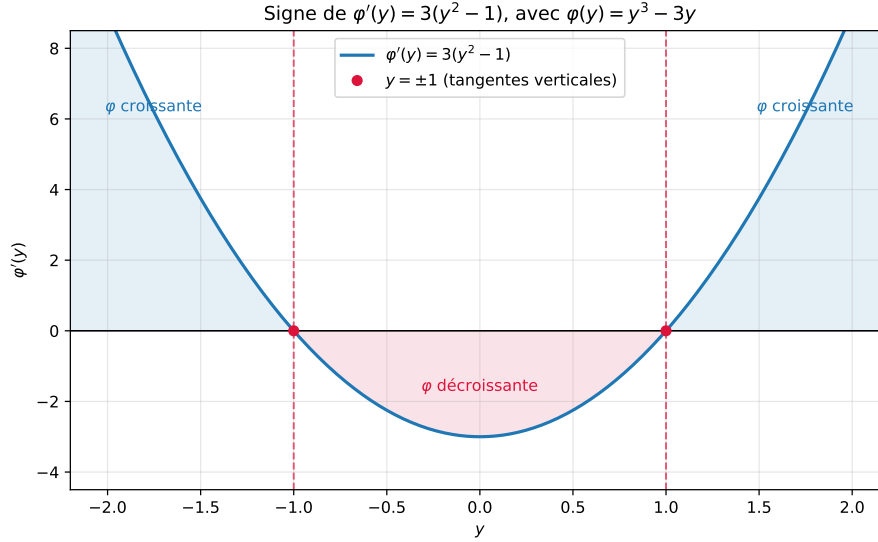


FIGURE 4. Signe de $\varphi'(y) = 3(y^2 - 1)$, où $\varphi(y) = y^3 - 3y$: la fonction φ est croissante sur $] -\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$, décroissante sur $[-1, 1]$.

- (1) La branche $y > 1$: comme φ réalise une bijection de $[1, +\infty)$ sur $[-2, +\infty)$, elle est définie pour tout $x < x_0$.
- (2) La branche $-1 < y < 1$: elle n'est définie que pour $\sqrt[3]{x_0^3 - 4} < x < x_0$, car elle atteint la valeur $y = -1$ lorsque $u(x) = \varphi(-1) = 2$, c'est-à-dire lorsque $x^3 = x_0^3 - 4$.

Le problème de Cauchy admet donc deux solutions : l'unicité est en défaut, et la seconde solution n'est définie que sur un intervalle borné. La courbe possède encore une troisième branche, située sous la droite $y = -1$ et passant par le point $(x_0, -2)$ — l'autre racine de $\varphi(y) = -2$ —, mais elle ne passe pas par $(x_0, 1)$ et ne fournit donc pas de solution du problème de Cauchy. On verra plus tard que le Théorème de l'existence et de l'unicité des solutions des équations différentielles ne peut pas être appliqué à ce problème de Cauchy, car la fonction $f(x, y) = \frac{x^2}{1-y^2}$ n'est pas continue sur un voisinage du point $(x_0, 1)$. Cependant, lorsque $x_0 \neq 0$, on peut étudier la limite de la dérivée : le long de chacune des deux solutions, $y(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow x_0^-$, et donc

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = \frac{x^2}{|1 - y(x)^2|} \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} +\infty,$$

la dérivée tendant vers $-\infty$ le long de la branche $y > 1$ (où $1 - y^2 < 0$) et vers $+\infty$ le long de la branche $-1 < y < 1$. Cela veut dire que les deux solutions admettent une tangente verticale au point $(x_0, 1)$: elles ne sont pas dérivables en x_0 , et sont donc définies seulement pour $x < x_0$, avec une limite égale à 1 en x_0 . Dans la figure suivante, on observe ce comportement pour différentes valeurs de x_0 .

où les dérivées ordinaires sont évaluées en t et les dérivées partielles sont évaluées en (x, y) .

Comme toujours, on travaille sous l'hypothèse que y est fonction de x . En appliquant la règle de la chaîne, on obtient que

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

En utilisant l'équation (2.9) et le fait que $\frac{dx}{dx} = 1$, on obtient que $\frac{dF}{dx} = 0$. Ainsi, on peut réécrire l'équation différentielle (2.8) sous la forme :

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0.$$

Par conséquent, la solution de l'équation différentielle (2.8) est donnée par l'équation implicite :

$$x^2 + xy^2 = K,$$

où K est une constante. L'argument principal pour résoudre l'équation différentielle (2.8) consiste à trouver une fonction $F(x, y)$ telle que $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y^2$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy$. On peut généraliser cette idée pour résoudre une classe plus large d'équations différentielles du premier ordre. Posons l'équation suivante :

$$(2.12) \quad M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

où M et N sont des fonctions continues sur un domaine ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$. On dit que l'équation différentielle (2.12) est *exacte* si et seulement s'il existe une fonction $F(x, y)$ telle que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y).$$

Dans ce cas, on peut écrire

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} F(x, y)$$

et l'équation différentielle (2.12) est équivalente à

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = 0.$$

Les solutions de (2.12) sont donc données implicitement par $F(x, y) = K$, où K est une constante réelle.

Dans l'exemple précédent il a été relativement facile de trouver la fonction $F(x, y)$, mais ce n'est pas toujours le cas. Il existe un critère simple pour déterminer si une équation différentielle du premier ordre est exacte.

Théorème 2.13. Soient M et N des fonctions continues avec des dérivées partielles continues $\frac{\partial M}{\partial y}$ et $\frac{\partial N}{\partial x}$ sur une région rectangulaire (ou plus généralement une région simplement connexe) $D \subset \mathbb{R}^2$. Alors l'équation différentielle du premier ordre

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

est exacte si et seulement si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

en tout point de D . Cela signifie qu'il existe une fonction $F(x, y)$ telle que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y).$$

si et seulement si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Démonstration. La preuve de ce théorème sera faite en TD. □

Exercice 2.14. Résolvez l'équation différentielle suivante :

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1) \frac{dy}{dx} = 0.$$

2.2.2. Facteurs intégrants. Dans certains cas, il est possible de transformer une équation différentielle du premier ordre non exacte en une équation exacte en multipliant les deux membres de l'équation par une fonction $u(x, y)$ appelée *facteur intégrant*. Considérons l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$(2.15) \quad M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

où M et N sont des fonctions continues sur un domaine ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$. Multiplions les deux membres de l'équation (2.15) par une fonction $u(x, y)$, puis essayons de trouver une condition sur u pour que l'équation différentielle suivante soit exacte :

$$(2.16) \quad u(x, y)M(x, y) + u(x, y)N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Selon le Théorème 2.13, l'équation différentielle (2.16) est exacte si et seulement si

$$(2.17) \quad \frac{\partial(uM)}{\partial y} = \frac{\partial(uN)}{\partial x}.$$

Cette condition peut être réécrite sous la forme :

$$(2.18) \quad u \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial u}{\partial y} = u \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial x}.$$

ou de façon équivalente :

$$(2.19) \quad M \frac{\partial u}{\partial y} - N \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) u = 0.$$

Si l'on peut trouver une fonction $u(x, y)$ qui vérifie cette dernière équation, alors l'équation différentielle (2.16) sera exacte. Cette équation est, elle aussi, difficile à résoudre en général, mais il existe des cas particuliers où l'on peut trouver un facteur intégrant simple, surtout lorsque celui-ci dépend uniquement de x ou de y . Dans ce cas, l'équation (2.19) se simplifie considérablement.

Exemple 2.20. Résolvez l'équation différentielle suivante :

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0.$$

Il est relativement facile de vérifier que l'équation différentielle précédente n'est pas exacte. Pour calculer un facteur intégrant, on peut essayer de trouver une fonction $u(x)$ qui ne dépend que de x . Dans ce cas, l'équation (2.19) se simplifie à :

$$-N \frac{du}{dx} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) u = 0$$

ou de façon équivalente :

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \right) u.$$

En remplaçant M et N par les fonctions correspondantes, on obtient :

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{3x + 2y - 2x - y}{x^2 + xy} \right) u = \frac{1}{x} u.$$

On cherche alors une fonction $u(x)$ telle que $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} u$. On peut séparer les variables et intégrer les deux membres de l'équation précédente pour obtenir :

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \implies \ln |u| = \ln |x| + C \implies u = Kx,$$

où K est une constante. On peut choisir $K = 1$ pour simplifier les calculs. Ainsi, le facteur intégrant est $u(x) = x$.

Exercice 2.21. Finir la résolution de l'équation différentielle précédente en utilisant le facteur intégrant $u(x) = x$. Résolvez la même équation différentielle en utilisant le facteur intégrant

$$u(x, y) = \frac{1}{xy(2x + y)}.$$

Est-ce qu'on obtient la même solution que dans le premier cas ?

2.3. Les équations linéaires et l'équation de Bernoulli

2.3.1. *Les équations linéaires du premier ordre.* Dans cette sous-section, on va étudier les équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$(2.22) \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

où p et q sont des fonctions (continues) définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et qui dépendent uniquement de la variable indépendante x . L'équation différentielle (2.22) est dite *linéaire* car la fonction inconnue y et sa dérivée $\frac{dy}{dx}$ apparaissent de manière linéaire. Parfois, il est plus pratique d'écrire l'équation différentielle (2.22) sous la forme :

$$(2.23) \quad P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x),$$

où P , Q et R sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Bien sûr, on peut toujours réécrire l'équation (2.23) sous la forme (2.22) en divisant les deux membres de l'équation par $P(x)$ (en supposant que $P(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$). Dans certains cas, il est possible de résoudre cette EDO en intégrant l'équation directement. Voici un exemple simple :

Exemple 2.24. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(2.25) \quad (4 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x.$$

Le membre de gauche de l'équation (2.25) correspond à la dérivée d'un produit. En effet, on peut vérifier que

$$\frac{d}{dx}((4 + x^2)y) = (4 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy.$$

Ainsi, on peut réécrire l'équation différentielle (2.25) sous la forme :

$$\frac{d}{dx}((4 + x^2)y) = 4x$$

Par conséquent, on peut intégrer les deux membres de l'équation précédente pour obtenir :

$$(4 + x^2)y = 2x^2 + C,$$

où C est une constante. Ainsi, la solution de l'équation différentielle (2.25) est donnée par :

$$y(x) = \frac{2x^2 + C}{4 + x^2}.$$

Cette solution est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, car le dénominateur $4 + x^2$ est toujours positif; c'est la solution générale de l'équation différentielle (2.25).

Bien sûr, il n'est pas toujours possible de réécrire le membre de gauche d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sous la forme d'une dérivée d'un produit. Dans ce cas, on peut chercher à multiplier les deux membres de l'équation par une fonction $u(x)$ appelée aussi *facteur intégrant* pour obtenir une équation équivalente dont le membre de gauche est la dérivée d'un produit.

Exemple 2.26. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(2.27) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{x/3}.$$

On va multiplier les deux membres de l'équation (2.27) par une fonction différentiable $u(x)$ et on cherche à trouver une condition sur u pour que le membre de gauche de l'équation suivante soit la dérivée d'un produit :

$$(2.28) \quad u(x)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}u(x)y = \frac{1}{2}u(x)e^{x/3}.$$

Pour toute fonction différentiable $u(x)$, on a que

$$(2.29) \quad \frac{d}{dx}(u(x)y) = u(x)\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dx}y.$$

Ainsi, le membre de droite de l'équation précédente et le membre de gauche de l'équation (2.28) sont égaux si et seulement si

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}u(x).$$

Par conséquent, on peut trouver un facteur intégrant $u(x)$ si l'on peut résoudre l'équation différentielle précédente. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à variables séparables. En séparant les variables et en intégrant les deux membres de l'équation, on obtient :

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{2}dx \Leftrightarrow \ln |u| = \frac{1}{2}x + C \implies u = Ke^{x/2},$$

où K est une constante. On peut choisir $K = 1$ pour simplifier les calculs. Ainsi, le facteur intégrant est $u(x) = e^{x/2}$. On revient maintenant à l'équation différentielle (2.27) et on multiplie les deux membres de l'équation par le facteur intégrant $u(x) = e^{x/2}$ (à noter que cette fonction est toujours positive et différentiable sur tout $\mathbb{R}$) pour obtenir :

$$e^{x/2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}e^{x/2}y = \frac{1}{2}e^{5x/6}.$$

Grâce au choix du facteur intégrant $u(x) = e^{x/2}$, le membre de gauche de l'équation précédente est la dérivée d'un produit. En effet, on peut vérifier que

$$\frac{d}{dx}(e^{x/2}y) = e^{x/2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}e^{x/2}y.$$

Ainsi, on peut réécrire l'équation différentielle (2.27) sous la forme :

$$\frac{d}{dx}(e^{x/2}y) = \frac{1}{2}e^{5x/6}.$$

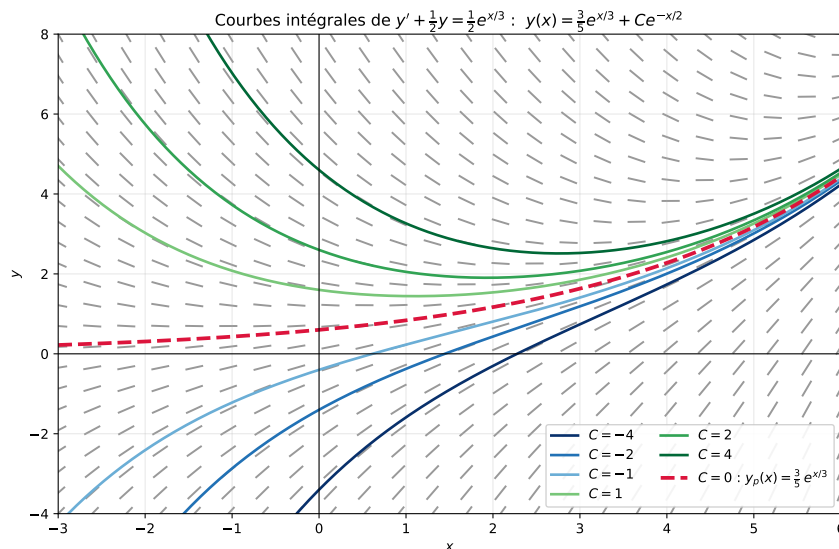
En intégrant les deux membres de l'équation précédente, on obtient :

$$e^{x/2}y = \frac{3}{5}e^{5x/6} + C,$$

où C est une constante. Ainsi, la solution de l'équation différentielle (2.27) est donnée par :

$$y(x) = \frac{3}{5}e^{x/3} + Ce^{-x/2}.$$

Voici quelques courbes-solutions de l'équation différentielle (2.27) pour différentes valeurs de la constante C .



Exercice 2.30. Trouver la solution générale aux équations différentielles de la forme :

$$\frac{dy}{dx} + ay = q(x),$$

où a est une constante donnée et $q(x)$ est une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Indication : Pensez à utiliser un facteur intégrant approprié.

Enfin, si on veut déterminer la solution de l'équation différentielle (2.27) qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$, on remplace x par 0 et y par 1 dans l'équation précédente pour obtenir :

$$1 = \frac{3}{5} + C \implies C = \frac{2}{5}.$$

Ainsi, la solution de l'équation différentielle (2.27) qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$ est

$$y(x) = \frac{3}{5}e^{x/3} + \frac{2}{5}e^{-x/2}.$$

2.3.2. L'équation de Bernoulli. Certaines équations différentielles non linéaires du premier ordre peuvent être transformées en équations linéaires du premier ordre. C'est le cas des équations différentielles de la forme :

$$(2.31) \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n,$$

où n est un paramètre réel donné. Ce type d'équation différentielle est appelé *équation de Bernoulli*. Lorsque $n = 0$ ou $n = 1$, l'équation de Bernoulli est déjà linéaire; on suppose donc désormais que $n \neq 0$ et $n \neq 1$. Remarquons d'abord que, lorsque $n > 0$, la fonction nulle $y \equiv 0$ est une solution de (2.31) : elle est perdue par la substitution qui suit et devra être rajoutée à la fin. On se place donc sur un intervalle où y ne s'annule pas — et où $y > 0$ si n n'est pas entier, afin que y^n ait un sens. On peut alors transformer l'équation de Bernoulli en une équation linéaire du premier ordre en utilisant la substitution $z = y^{1-n}$. En effet, on a que

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}.$$

De l'équation de Bernoulli (2.31), on a que

$$\frac{dy}{dx} = q(x)y^n - p(x)y.$$

En remplaçant $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation concernant $\frac{dz}{dx}$, on obtient :

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}(q(x)y^n - p(x)y).$$

Comme $z = y^{1-n}$, l'équation devient :

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)(q(x) - p(x)z).$$

ou de façon équivalente :

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Cette équation est linéaire du premier ordre et on peut la résoudre en utilisant les méthodes précédemment étudiées. Une fois que l'on a trouvé la solution $z(x)$, on peut retrouver la solution $y(x)$ de l'équation de Bernoulli en utilisant la substitution inverse $y = z^{\frac{1}{1-n}}$, sur tout intervalle où z ne s'annule pas. Il ne faut pas oublier d'y adjoindre la solution nulle lorsque $n > 0$.

Exercice 2.32. Résolvez les équations différentielles suivantes :

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -y^3$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = ay - by^2, \text{ où } a, b > 0 \text{ sont des constantes données.}$$

$$(2) \quad x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy - y^3 = 0$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = (A \cos x + B)y - y^3, \text{ où } A, B \text{ sont des constantes données.}$$

2.4. Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

Nous allons maintenant étudier les équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre, qui sont de la forme :

$$(2.33) \quad \frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y(x) = q(x),$$

où p et q sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Nous avons déjà vu certaines méthodes de résolution de ces équations dans la sous-section précédente, mais nous allons maintenant présenter une approche plus générale et systématique pour résoudre ce type d'équation différentielle.

Rappel 2.34 (Théorème fondamental de l'analyse). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$.

(1) *Première partie.* La fonction F définie pour tout $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable sur I et vérifie $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$: c'est donc une primitive de f sur I . En particulier, toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive, et celle-ci est de classe $\mathcal{C}^1$.

(2) *Corollaire.* Si G est une primitive quelconque de f sur I , alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

Ces deux énoncés seront utilisés sous la forme suivante : si p est continue sur I et si $x_0 \in I$, la fonction

$$P(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt$$

est bien définie et dérivable sur I , avec $P'(x) = p(x)$ pour tout $x \in I$. Par composition, e^P est dérivable sur I et

$$\frac{d}{dx} (e^{P(x)}) = p(x) e^{P(x)}.$$

Théorème 2.35. L'équation différentielle (2.33) admet pour solutions les fonctions de la forme :

$$y(x) = Ce^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x q(s)e^{-\int_s^x p(t)dt} ds,$$

où C est une constante réelle arbitraire, et x_0 est un point de l'intervalle I .

Démonstration. Supposons que $y(x)$ est une solution de l'équation différentielle (2.33) sur un intervalle $J \subseteq I$ contenant x_0 . Alors,

$$\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y \right) e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} = \frac{d}{dx} \left(y(x) \cdot e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} \right) = q(x) e^{\int_{x_0}^x p(t)dt}.$$

En intégrant (de x_0 à x) les deux membres de l'équation précédente, on obtient :

$$y(x) \cdot e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} = y(x_0) + \int_{x_0}^x q(s) e^{\int_{x_0}^s p(t)dt} ds.$$

Notez que on a encore utilisé le **Rappel 2.34**. En multipliant les deux membres de l'équation précédente par $e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$, on obtient :

$$y(x) = y(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_s^x p(t)dt} ds.$$

En posant $C = y(x_0)$, on obtient la solution générale de l'équation différentielle (2.33) :

$$y(x) = Ce^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_s^x p(t)dt} ds.$$

□

Remarque 2.36. Le **Théorème 2.35** n'apporte rien de nouveau par rapport aux sous-sections précédentes : c'est la méthode du facteur intégrant, menée une fois pour toutes dans le cas linéaire.

Dans la démonstration, on a multiplié l'équation par $e^{\int_{x_0}^x p(t) dt}$ précisément pour que le membre de gauche devienne la dérivée d'un produit, exactement comme on l'avait fait sur des exemples en cherchant une fonction $u(x)$ convenable.

On retrouve d'ailleurs cette fonction par la méthode générale. En écrivant l'équation (2.33) sous la forme (2.12), c'est-à-dire

$$\underbrace{(p(x)y - q(x))}_{M(x,y)} + \underbrace{1}_{N(x,y)} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

on a $\frac{\partial M}{\partial y} = p(x)$ et $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$. L'équation (2.19), qui détermine un facteur intégrant ne dépendant que de x , s'écrit alors

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \right) u = p(x) u,$$

dont les solutions sont $u(x) = K e^{\int_{x_0}^x p(t) dt}$. L'exponentielle qui apparaît dans le **Théorème 2.35** est donc précisément le facteur intégrant de l'équation linéaire (2.33).

2.5. Équations non linéaires du premier ordre

Le cadre de cette sous-section est le suivant. On se donne un réel $T \in]0, +\infty]$, qui peut donc aussi bien être fini qu'infini, un réel y_0 et une fonction $f \in \mathcal{C}([0, T[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, et on s'intéresse au problème de Cauchy

$$(2.37) \quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in]0, T[,$$

$$(2.38) \quad y(0) = y_0.$$

Par *solution*, on entendra ici une fonction $y \in \mathcal{C}([0, T]) \cap \mathcal{C}^1(]0, T[)$ satisfaisant ces deux relations. Remarquons au passage que l'égalité (2.70) vaut alors encore en $t = 0$, à condition d'y lire $y'(0)$ comme la dérivée à droite de y en 0.

Contrairement aux sous-sections précédentes, notre objectif n'est plus de calculer y , mais de savoir ce que l'on peut affirmer sur elle avant tout calcul. Trois questions se posent, et ce sont elles qui vont nous occuper :

- (1) *Existence locale*. Peut-on trouver un réel $\alpha > 0$, avec $\alpha \leq T$, et une fonction $y : [0, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}$ qui résolve le problème sur $[0, \alpha[$, c'est-à-dire qui vérifie (2.70)–(2.38) avec α à la place de T ?
- (2) *Existence globale*. Peut-on, dans la question précédente, prendre $\alpha = T$?
- (3) *Unicité*. Une telle solution est-elle la seule?

2.5.1. Exemples d'existence locale, globale et de non unicité. Avant d'énoncer le moindre théorème, il est instructif de regarder ce qui peut se produire sur quelques exemples élémentaires : ils montrent qu'aucune des trois questions ci-dessus ne reçoit automatiquement une réponse positive.

Exemple 2.39 (Un cas d'existence locale et non globale). Prenons $f(t, x) = x^2$ et $T = +\infty$ dans (2.70)–(2.38). Le problème de Cauchy s'écrit alors

$$(2.40) \quad y'(t) = y^2(t), \quad t > 0,$$

$$(2.41) \quad y(0) = 1.$$

Supposons qu'une solution y existe et commençons par observer qu'elle reste strictement positive : en effet, $y'(t) = y^2(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$, de sorte que y est croissante sur $[0, +\infty[$ et que, par conséquent, $y(t) \geq y(0) = 1 > 0$ pour tout $t \geq 0$. Comme y ne s'annule pas, on est autorisé à diviser l'équation (2.40) par $y^2(t)$:

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = 1.$$

Le membre de gauche se reconnaît : la fonction $t \mapsto -\frac{1}{y(t)}$ est dérivable et, par la règle de dérivation des fonctions composées,

$$\left(-\frac{1}{y} \right)'(t) = \frac{y'(t)}{y^2(t)}.$$

L'équation équivaut donc à $\left(-\frac{1}{y}\right)' = 1$. Deux fonctions dérivables ayant la même dérivée sur un intervalle y diffèrent d'une constante : il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$-\frac{1}{y(t)} = t + C.$$

La condition initiale (2.41) impose $-1 = 0 + C$, soit $C = -1$, et finalement

$$(2.42) \quad y(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Or cette expression n'a pas de sens en $t = 1$, et $y(t) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow 1^-$. Nous venons donc de montrer deux choses à la fois : d'une part le problème possède bien une solution sur $[0, 1[$; d'autre part il n'en possède aucune sur $[0, \alpha[$ dès que $\alpha > 1$. Le second point mérite qu'on s'y arrête : une solution sur $[0, \alpha[$ serait en particulier continue, donc bornée au voisinage de 1 ; mais le calcul ci-dessus montre qu'elle coïnciderait nécessairement avec (2.42) sur $[0, 1[$, laquelle n'est pas bornée. La contradiction est immédiate. Il y a donc existence *locale* pour le problème (2.40)–(2.41), mais pas existence globale.

Remarque 2.43 (Existence globale pour une autre condition initiale). Modifions la seule donnée initiale, en remplaçant (2.41) par $y_0 = -1$. Le calcul de l'Exemple 2.39 conduit toujours à $-\frac{1}{y(t)} = t + C$, mais la constante vaut cette fois $C = 1$, puisque $1 = 0 + C$. On obtient donc

$$y(t) = -\frac{1}{1+t},$$

qui, elle, est définie sur $\mathbb{R}_+$ tout entier : il y a existence globale. Le caractère global de l'existence ne dépend donc pas seulement de l'équation, c'est-à-dire de la fonction f , mais aussi du point de départ.

Remarque 2.44 (Méthode des variables séparables). Le calcul mené ci-dessus n'est qu'un cas particulier d'une technique déjà rencontrée au début de cette section, celle des variables séparables. Son principe est de ramener l'équation à la forme $h(y)y'(t) = g(t)$; si H désigne une primitive de h , le membre de gauche n'est autre que $(H(y))'(t)$, et l'équation devient $(H(y))'(t) = g(t)$. En notant G une primitive de g , on en tire l'existence d'une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $H(y(t)) = G(t) + C$ pour tout t . Dans l'Exemple 2.39, cela correspond aux choix $h(y) = 1/y^2$, $H(y) = -1/y$ et $g \equiv 1$.

Exemple 2.45 (Un cas de non unicité). Changeons maintenant de fonction f et prenons $f(t, x) = \sqrt{x}$, avec $y_0 = 0$ et $T = +\infty$:

$$(2.46) \quad y'(t) = \sqrt{y(t)}, \quad t > 0,$$

$$(2.47) \quad y(0) = 0.$$

Puisque nous cherchons des solutions à valeurs réelles, l'équation (2.46) n'a de sens que si $y(t) \geq 0$ pour tout t . Sous cette réserve, elle admet plusieurs solutions. La plus simple est la solution « triviale »

$$y_1(t) = 0, \quad \forall t \geq 0;$$

on vérifie en effet immédiatement que $y_1' = 0 = \sqrt{y_1}$ et que $y_1(0) = 0$. Une seconde s'obtient en séparant les variables : là où $y(t) > 0$, l'équation s'écrit $\frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} = 1$, c'est-à-dire $(2\sqrt{y})'(t) = 1$, d'où $2\sqrt{y(t)} = t + C$; la condition initiale donne $C = 0$, et donc

$$y_2(t) = \frac{t^2}{4}, \quad \forall t \geq 0.$$

La vérification est directe : $y_2'(t) = \frac{t}{2}$ et $\sqrt{y_2(t)} = \frac{|t|}{2} = \frac{t}{2}$ pour $t \geq 0$.

En réalité, ces deux solutions ne sont que les deux extrémités d'une famille infinie. Fixons en effet $t_0 > 0$ arbitraire et considérons la fonction définie par

$$y(t) = 0 \quad \text{si } 0 \leq t \leq t_0,$$

$$y(t) = \frac{(t - t_0)^2}{4} \quad \text{si } t > t_0;$$

elle est encore solution de (2.46)–(2.47). Détaillons cette vérification, car c'est le raccordement qui en fait tout l'intérêt. Sur $[0, t_0[$, la fonction est nulle et l'on a bien $y' = 0 = \sqrt{y}$; sur $]t_0, +\infty[$, on retrouve le calcul fait pour y_2 , simplement translaté de t_0 . Reste le point t_0 lui-même : les deux expressions y prennent la valeur 0, ce qui assure la continuité; la dérivée à gauche vaut 0 et la dérivée à droite vaut $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{t - t_0}{2} = 0$, ce qui assure la dérivabilité avec $y'(t_0) = 0$; enfin $\sqrt{y(t_0)} = 0$, de sorte que l'équation est également satisfaite en t_0 . Ainsi, une infinité de solutions passent par le point $(0, 0)$: l'existence est acquise, mais l'unicité tombe en défaut.

2.5.2. Résultats d'existence et d'unicité. L'hypothèse qui va permettre de répondre par l'affirmative aux questions d'existence locale et d'unicité porte sur la régularité de f par rapport à sa *seconde* variable : nous demanderons que f y soit localement lipschitzienne. Rappelons d'abord ce que ce terme signifie.

Définition 2.48 (Fonction lipschitzienne). On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est *lipschitzienne* s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cette propriété est, par exemple, automatiquement vérifiée par les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée est bornée. Il suffit en effet de poser $C = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f'(s)|$, qui est fini par hypothèse, pour obtenir, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $y \leq x$,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(s) ds \right| \leq \int_y^x |f'(s)| ds \leq C|x - y|.$$

Notons que la première égalité est une application du théorème fondamental de l'analyse (**Rappel 2.34**). La condition dont nous aurons réellement besoin est plus faible sur deux points : l'inégalité n'est exigée que sur les parties bornées, et seulement en la seconde variable.

Définition 2.49 (Fonction localement lipschitzienne). Soient $f \in \mathcal{C}([0, T[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $0 < T \leq +\infty$. On dit que f est *localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument* si :

$$\forall \alpha \in]0, T[, \forall R > 0, \exists C_{\alpha, R} > 0; \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq C_{\alpha, R}|x - y|, \quad \forall t \in [0, \alpha], \forall (x, y) \in \mathcal{B}_R^2,$$

où $\mathcal{B}_R = \{z \in \mathbb{R}, |z| \leq R\} = [-R, R]$.

Vérifier cette définition directement serait fastidieux; en pratique, on l'obtient presque toujours par le critère suivant, qui ne demande que de la dérivabilité.

Proposition 2.50 (Condition suffisante pour le caractère localement lipschitzien). Soient $f \in \mathcal{C}([0, T[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $0 < T \leq +\infty$. On suppose que f est dérivable par rapport à son deuxième argument et que

$$\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}([0, T[\times \mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

où $\frac{\partial f}{\partial y}$ désigne la dérivée de f par rapport à son deuxième argument. Alors f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument.

Démonstration. Établissons d'abord une majoration valable en toute généralité, puis spécialisons-la. Soient donc $t \in [0, T[$ et $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. À t fixé, la fonction d'une seule variable $z \mapsto f(t, z)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puisque sa dérivée $z \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(t, z)$ est continue par hypothèse. Le théorème fondamental de l'analyse (**Rappel 2.34**) s'applique donc et fournit

$$f(t, y) - f(t, x) = \int_x^y \frac{\partial f}{\partial y}(t, z) dz,$$

puis, en majorant le module de l'intégrale par l'intégrale du module (ce qui est licite car $x < y$),

$$(2.51) \quad |f(t, y) - f(t, x)| \leq \int_x^y \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, z) \right| dz.$$

Fixons maintenant $0 < \alpha < T$ et $R > 0$, et cherchons la constante $C_{\alpha, R}$. L'ensemble $[0, \alpha] \times \mathcal{B}_R$ est un produit de deux intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$: c'est donc un compact de $\mathbb{R}^2$, et il est contenu dans $[0, T[\times \mathbb{R}$. La fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ y est continue par hypothèse, donc bornée et atteignant ses bornes;

le nombre

$$\sup_{\substack{t \in [0, \alpha] \\ y \in \mathcal{B}_R}} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| = C_{\alpha, R}$$

est par conséquent fini. (C'est ici, et seulement ici, qu'intervient le fait qu'une fonction continue sur un compact est bornée.)

Il ne reste qu'à recoller les deux morceaux. Soient $t \in [0, \alpha]$ et $x, y \in [-R, R]$. Si $x = y$, l'inégalité cherchée est triviale. Si $x < y$, le segment $[x, y]$ est tout entier contenu dans $\mathcal{B}_R$, puisque $\mathcal{B}_R$ est un intervalle; l'intégrande de (2.51) y est donc majoré par $C_{\alpha, R}$, et cette inégalité donne

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leq C_{\alpha, R} (y - x) = C_{\alpha, R} |x - y|.$$

Le cas $y < x$ s'obtient en échangeant les rôles de x et de y , les deux membres de l'inégalité étant symétriques en ces deux variables. La fonction f est donc bien localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat d'existence locale. Il porte le nom de Cauchy et de Lipschitz, et constitue le théorème central de toute cette théorie.

Théorème 2.52 (Existence locale : Cauchy–Lipschitz). *Soient $f \in \mathcal{C}([0, T[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $0 < T \leq +\infty$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument (voir Définition 2.49). Alors il existe α , $0 < \alpha \leq T$, et $y \in \mathcal{C}^1([0, \alpha[, \mathbb{R})$ solution du problème de Cauchy (2.70)–(2.38). Il y a donc existence locale de la solution de ce problème.*

Sa démonstration est constructive mais longue, et nous lui consacrerons une section entière plus loin.

Passons à l'unicité. Elle repose sur une inégalité intégrale d'apparence modeste, mais dont l'usage est constant dans toute la théorie des équations différentielles.

Lemme 2.53 (Gronwall). *Soient $\alpha > 0$, $\psi \in \mathcal{C}([0, \alpha], \mathbb{R})$ et $a, b \geq 0$. On suppose que, pour tout $t \in [0, \alpha]$,*

$$(2.54) \quad 0 \leq \psi(t) \leq a + b \int_0^t \psi(s) ds.$$

On a alors, pour tout $t \in [0, \alpha]$, $\psi(t) \leq ae^{bt}$.

Démonstration. L'idée est de remplacer ψ , sur laquelle on ne sait rien, par le membre de droite de (2.54), qui est bien plus régulier. Posons donc, pour $t \in [0, \alpha]$,

$$\varphi(t) = a + b \int_0^t \psi(s) ds.$$

La fonction ψ étant continue sur $[0, \alpha]$, le théorème fondamental de l'analyse (Rappel 2.34) assure que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \alpha]$, avec

$$\varphi(0) = a \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = b\psi(t) \quad \text{pour tout } 0 < t < \alpha.$$

L'hypothèse (2.54) se relit alors comme $\psi(t) \leq \varphi(t)$ pour tout $t \in [0, \alpha]$; en multipliant cette inégalité par $b \geq 0$, ce qui en préserve le sens, on obtient l'inéquation différentielle

$$\varphi'(t) = b\psi(t) \leq b\varphi(t) \quad \text{pour tout } t.$$

On la traite par la méthode du facteur intégrant déjà utilisée pour les équations linéaires : en multipliant par $e^{-bt} > 0$,

$$(\varphi(t)e^{-bt})' = \varphi'(t)e^{-bt} - b\varphi(t)e^{-bt} = (\varphi'(t) - b\varphi(t))e^{-bt} \leq 0.$$

La fonction $t \mapsto \varphi(t)e^{-bt}$ a donc une dérivée négative ou nulle sur $[0, \alpha]$: elle y est décroissante, et par conséquent

$$\forall t \in [0, \alpha], \quad \varphi(t)e^{-bt} \leq \varphi(0)e^0 = \varphi(0) = a.$$

Il ne reste qu'à multiplier par $e^{bt} > 0$, ce qui donne $\varphi(t) \leq ae^{bt}$, puis à revenir à ψ grâce à l'inégalité $\psi \leq \varphi$:

$$0 \leq \psi(t) \leq \varphi(t) \leq ae^{bt}, \quad \text{pour tout } t \in [0, \alpha]. \quad \square$$

Théorème 2.55 (Unicité). *Soient $f \in \mathcal{C}([0, T[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $0 < T \leq +\infty$, et $y_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument (voir Définition 2.49). Soient y, z deux solutions du problème de Cauchy (2.70)–(2.38), définies et continues sur $[0, \alpha]$ avec $0 < \alpha < T$. Alors $z(t) = y(t)$ pour tout $t \in [0, \alpha]$.*

Démonstration. La stratégie consiste à majorer l'écart $|y - z|$ par une intégrale de lui-même, afin de conclure par le **Lemme 2.53**. Il faut pour cela commencer par produire un rayon R dans lequel les deux solutions sont enfermées, faute de quoi le caractère *localement* lipschitzien de f serait inutilisable.

Les fonctions y et z sont continues sur l'intervalle compact $[0, \alpha]$: elles y sont donc bornées, et il existe $R > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, \alpha], \quad |y(t)| \leq R \quad \text{et} \quad |z(t)| \leq R;$$

on peut par exemple prendre $R = \max(\max_{[0, \alpha]} |y|, \max_{[0, \alpha]} |z|)$, ces deux maxima existant par le théorème des bornes atteintes.

Comme $y'(t) = f(t, y(t))$ et $z'(t) = f(t, z(t))$, la différence des deux équations donne

$$y'(t) - z'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t)).$$

Le membre de droite est une fonction continue de t sur $[0, \alpha]$, comme différence de composées de fonctions continues : on peut donc l'intégrer entre 0 et t . En tenant compte de $y(0) = z(0) = y_0$, qui fait disparaître les termes de bord, il vient

$$y(t) - z(t) = \int_0^t (y'(s) - z'(s)) ds = \int_0^t (f(s, y(s)) - f(s, z(s))) ds, \quad \forall t \in [0, \alpha].$$

Prenons la valeur absolue, majorons le module de l'intégrale par l'intégrale du module, puis appliquons le caractère localement lipschitzien de f avec les paramètres α et R ci-dessus. Cette dernière étape est licite précisément parce que $y(s)$ et $z(s)$ appartiennent à $\mathcal{B}_R$ pour tout $s \in [0, \alpha]$. On obtient, pour tout $t \in [0, \alpha]$,

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &\leq \int_0^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \\ &\leq \int_0^t C_{\alpha, R} |y(s) - z(s)| ds, \end{aligned}$$

où $C_{\alpha, R}$ est la constante de Lipschitz fournie par la **Définition 2.49**. En abrégant $C = C_{\alpha, R}$, cela s'écrit

$$(2.56) \quad \forall t \in [0, \alpha], \quad |y(t) - z(t)| \leq \int_0^t C |y(s) - z(s)| ds.$$

Posons enfin $\psi(t) = |y(t) - z(t)|$ pour $t \in [0, \alpha]$: cette fonction est continue et positive, et (2.56) se lit

$$0 \leq \psi(t) \leq C \int_0^t \psi(s) ds, \quad \forall t \in [0, \alpha].$$

C'est exactement l'hypothèse (2.54) du **Lemme 2.53**, avec $a = 0$ et $b = C$. La conclusion du lemme s'écrit ici $0 \leq \psi(t) \leq 0 \cdot e^{Ct} = 0$: la constante nulle en facteur écrase tout, et $\psi(t) = |y(t) - z(t)| = 0$ pour tout $t \in [0, \alpha]$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Le théorème précédent se renforce de manière significative, et c'est l'objet du **Théorème 2.57** : il suffit que deux solutions coïncident en un *seul* instant, pas nécessairement l'instant initial, pour qu'elles coïncident partout. Dit autrement, deux trajectoires distinctes ne se rencontrent jamais — on appelle ici *trajectoire* de la solution y le graphe de la fonction $t \mapsto y(t)$.

Théorème 2.57 (Les trajectoires ne se rencontrent pas). Soient $f \in \mathcal{C}([0, T[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $0 < T \leq +\infty$. On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument (voir **Définition 2.49**). Soient y, z deux solutions de (2.70), définies et continues sur $[0, \alpha]$ avec $0 < \alpha < T$. On suppose qu'il existe $t_0 \in [0, \alpha]$ tel que $y(t_0) = z(t_0)$. Alors $z(t) = y(t)$ pour tout $t \in [0, \alpha]$.

Démonstration. Le point de départ est le même que pour le **Théorème 2.55** : y et z sont continues sur le compact $[0, \alpha]$, donc bornées, et il existe $R > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, \alpha], \quad |y(t)| \leq R \quad \text{et} \quad |z(t)| \leq R,$$

ce qui permet d'écrire, pour tout $s \in [0, \alpha]$,

$$|f(s, y(s)) - f(s, z(s))| \leq C |y(s) - z(s)|,$$

avec $C = C_{\alpha, R}$ comme dans la **Définition 2.49**.

La seule nouveauté est que l'instant où les deux solutions se rejoignent n'est plus l'origine : l'argument de Gronwall, qui part toujours de la borne inférieure de l'intervalle d'intégration, doit donc être mené *de part et d'autre* de t_0 . Nous traitons successivement $]t_0, \alpha]$ et $[0, t_0[$.

Intervalle $]t_0, \alpha]$. On translate le temps pour se ramener à une donnée en 0. Pour $0 < t < \alpha - t_0$, en intégrant entre t_0 et $t_0 + t$ et en utilisant $y(t_0) = z(t_0)$, qui annule les termes de bord, on obtient

$$y(t_0 + t) - z(t_0 + t) = \int_0^t (y'(t_0 + s) - z'(t_0 + s)) ds = \int_0^t (f(t_0 + s, y(t_0 + s)) - f(t_0 + s, z(t_0 + s))) ds,$$

la première égalité résultant du changement de variable $u = t_0 + s$ dans $\int_{t_0}^{t_0+t} (y'(u) - z'(u)) du$. En passant aux valeurs absolues et en utilisant la majoration lipschitzienne ci-dessus, il vient

$$|y(t_0 + t) - z(t_0 + t)| \leq \int_0^t |f(t_0 + s, y(t_0 + s)) - f(t_0 + s, z(t_0 + s))| ds \leq C \int_0^t |y(t_0 + s) - z(t_0 + s)| ds.$$

La fonction $\psi(t) = |y(t_0 + t) - z(t_0 + t)|$ est continue et positive sur $[0, \alpha - t_0]$, et l'inégalité précédente s'écrit $0 \leq \psi(t) \leq C \int_0^t \psi(s) ds$. Le **Lemme 2.53**, appliqué avec $a = 0$ et $b = C$, donne $\psi \equiv 0$ sur $[0, \alpha - t_0]$, c'est-à-dire $y = z$ sur $[t_0, \alpha]$.

Intervalle $[0, t_0]$. Le raisonnement est identique, à ceci près que l'on *renverse* le sens du temps en posant $u = t_0 - s$. Pour $0 < t < t_0$, et toujours grâce à $y(t_0) = z(t_0)$,

$$y(t_0 - t) - z(t_0 - t) = \int_0^t (-y'(t_0 - s) + z'(t_0 - s)) ds = - \int_0^t (f(t_0 - s, y(t_0 - s)) - f(t_0 - s, z(t_0 - s))) ds,$$

le signe $-$ provenant du changement de variable $u = t_0 - s$, dont la dérivée vaut -1 . On en déduit

$$|y(t_0 - t) - z(t_0 - t)| \leq \int_0^t |f(t_0 - s, y(t_0 - s)) - f(t_0 - s, z(t_0 - s))| ds \leq C \int_0^t |y(t_0 - s) - z(t_0 - s)| ds,$$

et le lemme de Gronwall appliqué cette fois à $\psi(t) = |y(t_0 - t) - z(t_0 - t)|$ donne $\psi \equiv 0$ sur $[0, t_0]$, soit $y = z$ sur $[0, t_0]$.

En réunissant les deux intervalles, on conclut que $y = z$ sur $[0, \alpha]$. $\square$

Ce résultat est l'outil de base de ce qu'on appelle l'*étude qualitative* des solutions : sans rien calculer, il permet souvent d'enfermer une solution entre deux autres, connues, et d'en déduire son comportement. Nous allons l'illustrer, ainsi que les notions de *solution d'équilibre*, de *temps maximal d'existence* et d'*explosion en temps fini*, sur le modèle de Verhulst du chapitre précédent, dans le cas normalisé $a = b = 1$:

$$(2.58) \quad y'(t) = y(t)(1 - y(t)), \quad t \in]0, +\infty[,$$

$$(2.59) \quad y(t_0) = y_0 \in]0, 1[.$$

L'équation (2.58) possède deux solutions d'équilibre immédiates, à savoir $y_1 \equiv 0$ et $y_2 \equiv 1$, au sens que voici.

Définition 2.60 (Solution d'équilibre). Une solution de l'EDO (2.70) qui ne dépend pas du temps est appelée *solution d'équilibre*, ou encore *solution stationnaire*. Une telle solution vérifie donc $y'(t) = 0$ pour tout $t \in]0, T[$, ce qui revient exactement à demander que $f(t, y(t)) = 0$ pour tout $t \in]0, T[$.

Les constantes $y_1 \equiv 0$ et $y_2 \equiv 1$ annulent effectivement le second membre $y(1 - y)$: ce sont donc des solutions stationnaires de (2.58), autrement dit les solutions du problème de Cauchy correspondant aux données initiales $y_0 = 0$ et $y_0 = 1$. Or, d'après le **Théorème 2.57**, deux trajectoires ne peuvent pas se croiser : une solution issue d'un $y_0 \in]0, 1[$ ne peut donc franchir ni la droite $y = 0$, ni la droite $y = 1$. Elle reste ainsi strictement comprise entre 0 et 1 pour tout temps.

Cet encadrement, obtenu sans le moindre calcul, est plus utile qu'il n'y paraît : il interdit à la solution de partir à l'infini. Le théorème suivant explique pourquoi c'est là exactement l'information dont on a besoin. Il introduit le temps maximal d'existence T_m et décrit ce qui se produit lorsque T_m est fini.

Théorème 2.61 (Solution maximale, explosion en temps fini). Soient $0 < T \leq +\infty$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument et on considère le problème de Cauchy (2.70)–(2.38). Soit

$$T_m = \sup \{ \alpha \in]0, T[\text{ tel qu'il existe une solution de (2.70)–(2.38) sur } [0, \alpha[\}.$$

Alors il existe une solution de (2.70)–(2.38) sur $[0, T_m[$, et on dit que T_m est le temps maximal d'existence. Cette solution y est l'unique solution sur $[0, T_m[$; elle s'appelle *solution maximale du problème (2.70)–(2.38)*.

De plus, si $T_m < T$, alors $\lim_{t \rightarrow T_m} |y(t)| = +\infty$.

Démonstration. Assurons-nous d'abord que la quantité T_m a un sens. L'ensemble des réels $\alpha > 0$ pour lesquels il existe une solution de (2.70)–(2.38) sur $[0, \alpha]$ est non vide, en vertu du **Théorème 2.52** d'existence locale, et il est majoré par T ; il admet donc une borne supérieure, strictement positive (ou égale à $+\infty$ lorsque $T = +\infty$). Ainsi T_m est bien défini et $0 < T_m \leq T$.

Construisons maintenant la solution sur $[0, T_m]$ en recollant des solutions définies sur des intervalles de plus en plus grands. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset]0, T_m]$ telle que

$$\alpha_{n+1} \geq \alpha_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = T_m,$$

et telle que, pour chaque n , le problème admette une solution sur $[0, \alpha_n]$; notons y_n cette solution, qui est unique d'après le **Théorème 2.55**.

Ce même théorème d'unicité montre que $y_n = y_{n+1}$ sur $[0, \alpha_n]$: en effet, y_n et la restriction de y_{n+1} à $[0, \alpha_n]$ y sont deux solutions du même problème de Cauchy. Les y_n se prolongent donc les unes les autres, et l'on peut définir *sans ambiguïté* une fonction y sur $[0, T_m]$ en posant $y = y_n$ sur $[0, \alpha_n]$, pour chaque n . Deux points méritent d'être soulignés : la définition est cohérente parce que deux indices distincts donnent la même valeur sur l'intersection des intervalles correspondants; et elle couvre bien tout $[0, T_m]$, car tout $t < T_m$ appartient à $[0, \alpha_n]$ dès que n est assez grand, puisque $\alpha_n \rightarrow T_m$. Enfin, la fonction y ainsi obtenue est solution sur $[0, T_m]$, car être solution est une propriété locale : au voisinage de chaque point, y coïncide avec l'une des y_n . On distingue alors deux situations :

- si $T_m < T$, il n'existe aucune solution sur $[0, \beta]$ dès que $\beta > T_m$, par définition même de la borne supérieure T_m ;
- si $T_m = T$, alors y est une solution globale.

Quant à l'explosion en temps fini, *i.e.* le fait que $T_m < T$ entraîne $\lim_{t \rightarrow T_m} |y(t)| = +\infty$, sa démonstration sera donnée plus loin. $\square$

Le lemme suivant, qui n'est qu'une application soignée du théorème des accroissements finis, complète le tableau dans le cas autonome : si une solution globale converge en $+\infty$, sa limite ne peut être qu'un point d'équilibre.

Lemme 2.62 (Limite des solutions globales). *Soient $y_0, t_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; on considère le problème de Cauchy*

$$(2.63) \quad y'(t) = f(y(t)), \quad t > t_0,$$

$$(2.64) \quad y(t_0) = y_0.$$

On suppose qu'il existe une solution globale y de (2.63)–(2.64), et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $t \mapsto \ell$ est une solution stationnaire (c'est-à-dire que ℓ est un point d'équilibre).

Démonstration. L'astuce consiste à comparer y à elle-même sur des intervalles de longueur fixe, ici égale à 1. Soit $t \geq t_0$. La fonction y est continue sur $[t, t+1]$ et dérivable sur $]t, t+1[$ — elle est même de classe $\mathcal{C}^1$, puisque c'est une solution. Le théorème des accroissements finis s'applique donc et fournit un point $\theta_t \in]t, t+1[$ tel que

$$y(t+1) - y(t) = (t+1-t) y'(\theta_t) = y'(\theta_t).$$

L'équation (2.63) permet de remplacer $y'(\theta_t)$ par $f(y(\theta_t))$, d'où, pour tout $t \geq t_0$,

$$y(t+1) - y(t) = f(y(\theta_t)).$$

Faisons tendre t vers $+\infty$ et examinons les deux membres séparément. À gauche, $y(t+1)$ et $y(t)$ tendent tous deux vers ℓ , si bien que $y(t+1) - y(t) \rightarrow \ell - \ell = 0$. À droite, l'encadrement $t < \theta_t < t+1$ force $\theta_t \rightarrow +\infty$, donc $y(\theta_t) \rightarrow \ell$; la continuité de f au point ℓ donne alors $f(y(\theta_t)) \rightarrow f(\ell)$. Par unicité de la limite, $f(\ell) = 0$: le réel ℓ est bien un point d'équilibre. $\square$

Dans l'autre sens, une comparaison avec l'équation $y' = y^2$ de l'**Exemple 2.39** fournit un critère commode pour détecter le caractère « explosif » d'une solution.

Lemme 2.65 (Explosion par comparaison). *Soient $y_0, t_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; on considère le problème de Cauchy (2.63)–(2.64). On suppose qu'il existe une solution y de (2.63)–(2.64) sur $]t_0, T[$ avec $y(t) \geq y_0 > 0$ pour tout $t \in [t_0, T[$ et $f(y(t)) \geq y(t)^2$. Alors $T < +\infty$.*

Démonstration. Comme $y'(t) = f(y(t))$, l'hypothèse $f(y(t)) \geq y(t)^2$ se réécrit $y'(t) \geq y^2(t)$. La solution restant minorée par $y_0 > 0$, la division par $y^2(t) > 0$ est licite et donne

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} \geq 1 \quad \text{pour tout } t \in [t_0, T[.$$

Comme y ne s'annule pas, on reconnaît au membre de gauche la dérivée de $t \mapsto -\frac{1}{y(t)}$, exactement comme dans l'**Exemple 2.39**. Intégrons cette inégalité entre t_0 et un instant $t < T$, en tenant compte de $y(t_0) = y_0$:

$$\left[-\frac{1}{y(s)} \right]_{s=t_0}^{s=t} = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)} \geq t - t_0 \quad \text{pour tout } t \in [t_0, T[.$$

On en tire $\frac{1}{y(t)} \leq \frac{1}{y_0} - t + t_0$. Le membre de gauche est strictement positif puisque $y(t) > 0$; il en va donc de même du membre de droite, ce qui impose

$$t \leq t_0 + \frac{1}{y_0} \quad \text{pour tout } t \in [t_0, T[.$$

L'intervalle $[t_0, T[$ est ainsi majoré par le réel $t_0 + 1/y_0$, d'où $T \leq t_0 + 1/y_0 < +\infty$: la solution ne peut pas être globale. $\square$

Exemple 2.66 (Comportement qualitatif des solutions du modèle de Verhulst). Revenons au problème (2.58)–(2.59) et voyons comment les résultats précédents permettent de tout décrire sans résoudre l'équation. Nous avons vu que la solution reste confinée entre 0 et 1; elle ne peut donc pas tendre vers l'infini, et le **Théorème 2.61** force $T_m = +\infty$. En effet, si l'on avait $T_m < T = +\infty$, ce théorème imposerait $|y(t)| \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow T_m$, ce qui contredit l'encadrement $0 < y(t) < 1$. La solution est donc définie sur $[0, +\infty[$ tout entier.

L'existence globale étant acquise, la limite en $+\infty$ s'obtient sans peine grâce au **Lemme 2.62**. Puisque $0 < y(t) < 1$, on a $y'(t) = y(t)(1 - y(t)) > 0$: la fonction y est strictement croissante, et à valeurs entre y_0 et 1. Croissante et majorée par 1, elle admet une limite en $+\infty$: il existe ℓ avec $0 < \ell \leq 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \ell$, et le **Lemme 2.62** garantit que ℓ est un point d'équilibre. Comme les seuls points d'équilibre sont 0 et 1, et que $\ell \geq y_0 > 0$ exclut la valeur 0, il ne reste que $\ell = 1$. Signalons pour finir que, sur cet exemple particulier, la solution exacte peut être calculée; ce sera l'objet d'un exercice.

Une mise en garde s'impose sur la dernière assertion du **Théorème 2.61** : elle n'admet pas de réciproque. Une solution peut fort bien tendre vers l'infini en T_m sans que T_m soit strictement inférieur à T , comme le montre l'exemple suivant, aussi simple que possible.

Exemple 2.67 ($\lim_{t \rightarrow T_m} |y(t)| = +\infty \not\Rightarrow T_m < T$). Prenons $T = +\infty$, $t_0 = 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, et considérons le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} y'(t) &= 1, & t > 0, \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Ici $f(t, x) = 1$ est constante, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, et trivialement localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument : n'importe quelle constante $C_{\alpha, \mathbb{R}}$ convient, puisque $f(t, x) - f(t, y) = 0$. La solution est $y(t) = t + y_0$ pour tout $t \geq 0$, et elle est définie pour tout temps : on a donc $T_m = T = +\infty$. Pourtant $\lim_{t \rightarrow T_m} |y(t)| = +\infty$. La réciproque de la dernière assertion du **Théorème 2.61** est donc bien fautive.

Terminons par la notion de stabilité d'un point d'équilibre, que nous formulons dans le cadre autonome, c'est-à-dire pour l'équation

$$(2.68) \quad y'(t) = f(y(t)), \quad t > 0.$$

Définition 2.69 (Stabilité des points d'équilibre). Soit $a \in \mathbb{R}$ un zéro de f , c'est-à-dire $f(a) = 0$. La fonction constante égale à a est alors une solution de (2.68), et l'on dit que a est un *point d'équilibre*. On dit de plus que ce point d'équilibre est *stable* — plus précisément *uniformément stable* — lorsque toute donnée initiale suffisamment proche de a engendre une solution globale, et que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } (y \text{ solution de l'équation autonome, } |y(0) - a| \leq \delta) \Rightarrow \sup_{t > 0} |y(t) - a| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit : partir près de a garantit de rester près de a , et ce uniformément en temps.

Nous verrons plus loin que, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, c'est le signe de $f'(a)$ qui décide : le point d'équilibre a est stable dès que $f'(a) < 0$, et instable (c'est-à-dire non stable) dès que $f'(a) > 0$. Le cas $f'(a) = 0$ échappe à ce critère et réclame une étude plus fine de la fonction f .

2.6. Théorème de Cauchy-Lipschitz : existence locale et globale

Soient $f : [t_0, T[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $y_0 \in \mathbb{R}$. Dans la sous-section précédente, nous avons énoncé le théorème de Cauchy-Lipschitz (voir **Théorème 2.52** et **Théorème 2.55**), qui garantit l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy suivant :

$$(2.70) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in]t_0, T[, \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ici, la solution y doit être de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]t_0, T[$ et continue sur l'intervalle fermé $[t_0, T[$. On distingue deux questions :

- (1) **Existence locale** : c'est-à-dire, existe-t-il un $\alpha > 0$ et une fonction y définie sur $[t_0, t_0 + \alpha]$ avec $t_0 + \alpha < T$, qui satisfait (2.70) ? Le théorème de Cauchy-Lipschitz local (voir **Théorème 2.52**) répond à cette question par l'affirmative, sous l'hypothèse que f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument.
- (2) **Existence globale** : c'est-à-dire, existe-t-il une fonction y définie sur $[t_0, T[$ qui satisfait (2.70) ?

2.6.1. Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence locale. Comme nous l'avons vu précédemment, l'hypothèse récurrente pour garantir l'existence des solutions est que f soit localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument, c'est-à-dire que pour tout $a \in]t_0, T[$ et tout $A > 0$, il existe une constante $C_{a,A} > 0$ telle que

$$\forall t \in [t_0, a], \forall x, z \in [-A, A], \quad |f(t, x) - f(t, z)| \leq C_{a,A} |x - z|.$$

Dans cette sous-section, nous allons étudier la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence locale (voir **Théorème 2.52**), puis la preuve de la deuxième partie du **Théorème 2.61**, qui établit l'explosion en temps fini d'une solution maximale non globale. On rappelle que ces théorèmes ont été énoncés avec $t_0 = 0$ pour simplifier les notations, mais la preuve est identique pour un t_0 quelconque. Nous travaillerons ici avec un t_0 quelconque.

Pour démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence locale, nous allons utiliser la *forme intégrale du problème de Cauchy* (2.70) :

Proposition 2.71. Soient $f : [t_0, T[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $t_0 < T \leq +\infty$ et f continue. Soient $y_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ avec $t_0 + \alpha < T$. Alors une fonction $y \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + \alpha], \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(]t_0, t_0 + \alpha[, \mathbb{R})$ est solution du problème de Cauchy

$$(2.72) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + \alpha[, \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

si et seulement si elle satisfait la forme intégrale suivante :

$$(2.73) \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha]$$

avec $y : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Démonstration. On suppose tout d'abord que

$$y \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + \alpha], \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(]t_0, t_0 + \alpha[, \mathbb{R})$$

est solution de (2.72) avec $t_0 + \alpha$ au lieu de T . On va montrer que y est solution de (2.73).

Pourquoi ne pas intégrer directement de t_0 à t ? La fonction y n'est supposée de classe $\mathcal{C}^1$ que sur l'intervalle ouvert $]t_0, t_0 + \alpha[$: a priori, y n'est pas dérivable en t_0 , et y' peut ne pas être bornée au voisinage de t_0 (par exemple, $s \mapsto \sqrt{s - t_0}$ est continue sur $[t_0, t_0 + \alpha]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]t_0, t_0 + \alpha[$, mais sa dérivée $\frac{1}{2\sqrt{s - t_0}}$ tend vers $+\infty$ en t_0). Le théorème fondamental de l'analyse, qui exige que y soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle fermé, ne peut donc pas être appliqué sur $[t_0, t]$. On l'applique sur $[t_0 + \varepsilon, t]$, puis on fait tendre ε vers 0.

Étape 1 : intégration loin de t_0 . Soient ε et t tels que $t_0 < t_0 + \varepsilon < t < t_0 + \alpha$. Le segment $[t_0 + \varepsilon, t]$ est inclus dans $]t_0, t_0 + \alpha[$, donc y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment et le théorème fondamental de l'analyse donne

$$y(t) - y(t_0 + \varepsilon) = \int_{t_0 + \varepsilon}^t y'(s) ds.$$

Comme $y'(s) = f(s, y(s))$ pour tout $s \in]t_0, t_0 + \alpha[$ d'après (2.72), on obtient

$$(2.74) \quad y(t) - y(t_0 + \varepsilon) = \int_{t_0 + \varepsilon}^t f(s, y(s)) ds.$$

Étape 2 : passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

- *Membre de gauche.* La fonction y est continue en t_0 (car continue sur $[t_0, t_0 + \alpha]$) et $y(t_0) = y_0$ d'après la condition initiale de (2.72). Donc $y(t_0 + \varepsilon) \rightarrow y_0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.
- *Membre de droite.* Posons $g(s) = f(s, y(s))$. Comme f est continue et y est continue sur le segment $[t_0, t_0 + \alpha]$, la fonction g est continue sur ce segment *tout entier*, y compris en t_0 (contrairement à y' , dont on ne sait rien en t_0). Elle est donc bornée : il existe $M \geq 0$ tel que $|g(s)| \leq M$ pour tout $s \in [t_0, t_0 + \alpha]$. On en déduit

$$\left| \int_{t_0}^t g(s) ds - \int_{t_0 + \varepsilon}^t g(s) ds \right| = \left| \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} g(s) ds \right| \leq \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} M ds = M\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

En faisant tendre ε vers 0 dans (2.74), on obtient, pour tout $t_0 < t < t_0 + \alpha$,

$$(2.75) \quad y(t) - y_0 = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Étape 3 : les extrémités.

- Pour $t = t_0$, les deux membres de (2.75) sont nuls, puisque $y(t_0) = y_0$ et que l'intégrale sur $[t_0, t_0]$ est nulle.
- Pour $t = t_0 + \alpha$: le membre de gauche $t \mapsto y(t) - y_0$ est continu sur $[t_0, t_0 + \alpha]$ par hypothèse, et le membre de droite $t \mapsto \int_{t_0}^t g(s) ds$ est continu en t comme primitive d'une fonction continue. Ces deux fonctions coïncident sur $]t_0, t_0 + \alpha[$, donc, par continuité, elles coïncident aussi en $t_0 + \alpha$.

L'égalité (2.75) est donc vraie pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, ce qui montre que y est bien solution de (2.73). Réciproquement, si y satisfait (2.73), elle est continue sur $[t_0, t_0 + \alpha]$ et dérivable sur $]t_0, t_0 + \alpha[$. De plus, y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]t_0, t_0 + \alpha[$ et vérifie

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{pour tout } t \in]t_0, t_0 + \alpha[.$$

Il est clair que $y(t_0) = y_0$ d'après (2.73). Ainsi, y est solution de (2.72). □

Remarque 2.76. L'égalité (2.75) montre au passage que y est une primitive de la fonction continue g sur $[t_0, t_0 + \alpha]$: y est donc en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout le segment fermé, avec $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$. Mais c'est une *conséquence* de la démonstration, qu'on ne pouvait pas utiliser comme hypothèse au départ.

Démonstration du Théorème 2.52.

L'idée de la preuve consiste à construire une suite de fonctions $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une solution de la forme intégrale (2.73).

Étape 1 : construction de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $\alpha > 0$ tel que $t_0 + \alpha < T$, on définit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence :

- $y_0(t) = y_0$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$;
- $y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.

On commence par considérer un intervalle $[-A, A]$ où $A > 0$ est choisi de sorte que $y_0 \in [-A, A]$ et on considère $a > 0$ tel que $t_0 < a < T$. On va montrer qu'on peut choisir $\alpha > 0$ suffisamment petit pour que $t_0 + \alpha \leq a$ et que $y_n(t) \in [-A - 1, A + 1]$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Le choix de α va dépendre de A et de a (ainsi que de f), mais ni de t_0 ni de y_0 pourvu que y_0 soit dans $[-A, A]$ et que $t_0 + \alpha \leq a$. Autrement dit, on peut changer le temps initial t_0 et la condition initiale y_0 sans changer α .

Comme f est continue sur le compact $K = [t_0, a] \times [-A - 1, A + 1]$ il existe $M > 0$ fini tel que $|f(t, y)| \leq M$ pour tout $(t, y) \in K$. Il suffit de considérer

$$M := \max\{\max_K |f|, 0\}$$

pour que M soit positif. Soit $\alpha_1 = \frac{1}{M} > 0$. On va montrer par récurrence sur n que pour tout α tel que $\alpha \leq \alpha_1$ et $t_0 + \alpha \leq a$, on a que

$$y_n \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + \alpha], [-A - 1, A + 1]) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

On a bien que $y_1 \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + \alpha], [-A - 1, A + 1])$ car $y_1(t) = y_0$ pour tout t . Soit $n \geq 1$ et supposons que $y_n \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + \alpha], [-A - 1, A + 1])$. Alors pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ et $\alpha \leq \alpha_1$ et $t_0 + \alpha \leq a$, on a que

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right| \leq |y_0| + \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s))| ds \\ &\leq A + \int_{t_0}^t M ds \\ &\leq A + M\alpha \\ &\leq A + M\alpha_1 \\ &= A + 1. \end{aligned}$$

Notons qu'on a utilisé le fait que $t - t_0 \leq \alpha$ et donc $(t - t_0)M \leq \alpha M \leq \alpha_1 M = 1$.

On a donc bien que $y_{n+1} \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + \alpha], [-A - 1, A + 1])$. Par récurrence, on a donc que pour tout $n \geq 1$, $y_n \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + \alpha], [-A - 1, A + 1])$.

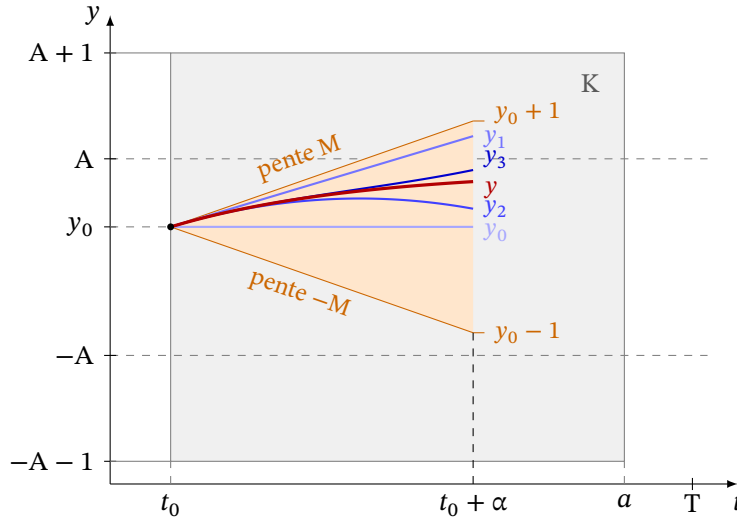


FIGURE 5. Étape 1. Le rectangle $K = [t_0, a] \times [-A - 1, A + 1]$ est compact, donc $|f| \leq M$ sur K . Tant que y_n reste dans K , on a $|y_{n+1}(t) - y_0| \leq M(t - t_0)$: le graphe de y_{n+1} reste dans le cône orange. En choisissant $\alpha \leq \min(a - t_0, 1/M)$, ce cône ne sort pas de $[y_0 - 1, y_0 + 1] \subset [-A - 1, A + 1]$, donc toutes les itérées $y_0, y_1, y_2, \dots$ restent dans K sur $[t_0, t_0 + \alpha]$ et elles convergent vers la solution y .

Étape 2 : convergence de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On va montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[t_0, t_0 + \alpha]$ vers une fonction y qui est continue. Supposons maintenant que $0 < \alpha \leq \alpha_1$ et $t_0 + \alpha \leq a$. Comme f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument, il existe

une constante $C = C_{a,A+1} > 0$ telle que

$$|f(t, x) - f(t, z)| \leq C|x - z| \quad \text{pour tout } t \in [t_0, a], \quad x, z \in [-A - 1, A + 1].$$

Comme $y_n(s)$ et $y_{n-1}(s)$ sont dans $[-A - 1, A + 1]$ grâce à l'étape 1, on a donc pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ et tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))| ds \\ &\leq C \int_{t_0}^t |y_n(s) - y_{n-1}(s)| ds \end{aligned}$$

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}([t_0, t_0 + \alpha], \mathbb{R})$ de la norme $\|g\|_\infty = \sup_{t \in [t_0, t_0 + \alpha]} |g(t)|$. On en déduit que pour tout $n \geq 2$ et tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$:

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &\leq C \int_{t_0}^t \|y_n - y_{n-1}\|_\infty ds \\ &\leq C(t - t_0) \|y_n - y_{n-1}\|_\infty \\ &\leq C\alpha \|y_n - y_{n-1}\|_\infty \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|y_{n+1} - y_n\|_\infty \leq C\alpha \|y_n - y_{n-1}\|_\infty$$

On choisit $\alpha_2 = \frac{1}{2C}$ de sorte que $C\alpha_2 \leq 1/2$ et on prend α tel que $\alpha \leq \alpha_1$ et $\alpha \leq \alpha_2$ et $t_0 + \alpha \leq a$ (par exemple $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, a - t_0)$). Alors pour tout $n \geq 2$:

$$\|y_{n+1} - y_n\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|y_n - y_{n-1}\|_\infty$$

Par récurrence, on obtient que pour tout $n \geq 1$:

$$\|y_{n+1} - y_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^{n-1}} \|y_2 - y_1\|_\infty$$

L'inégalité triangulaire donne pour tout $m > n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|_\infty &\leq \|y_m - y_{m-1}\|_\infty + \|y_{m-1} - y_{m-2}\|_\infty + \cdots + \|y_{n+1} - y_n\|_\infty \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|y_{k+1} - y_k\|_\infty \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^{k-1}} \|y_2 - y_1\|_\infty \\ &\leq \|y_2 - y_1\|_\infty \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \|y_2 - y_1\|_\infty \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\ &\leq \|y_2 - y_1\|_\infty \frac{2}{2^{n-1}} \\ &= 2\|y_2 - y_1\|_\infty \frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Ainsi $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $\mathcal{C}([t_0, t_0 + \alpha], \mathbb{R})$, donc elle converge uniformément. Cela veut dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n, m \geq N \Rightarrow \|y_m - y_n\|_\infty < \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, la suite $(y_n(t))_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, car

$$|y_m(t) - y_n(t)| \leq \|y_m - y_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Comme $\mathbb{R}$ est complet, la suite $(y_n(t))_{n \geq 1}$ converge vers une limite $y(t) \in \mathbb{R}$. On définit donc la fonction $y : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t)$$

pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. On remarque que $y_n(t) \in [-A - 1, A + 1]$ pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, donc $y(t) \in [-A - 1, A + 1]$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. De plus y est continue car

$$|y_m(t) - y_n(t)| \leq \|y_m - y_n\|_\infty \leq 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}} \|y_2 - y_1\|_\infty}_{\text{ne dépend pas de } m}$$

En fixant n et t on obtient que lorsque $m \rightarrow +\infty$, $|y_m(t) - y_n(t)| \rightarrow |y(t) - y_n(t)|$ et donc

$$|y(t) - y_n(t)| \leq 2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \|y_2 - y_1\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi y_n converge uniformément vers y sur $[t_0, t_0 + \alpha]$. Pour conclure, on utilise le fait que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur un intervalle est continue. Ainsi y est continue sur $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Étape 3 : y est solution de la forme intégrale. Il reste à montrer que y est la solution de la forme intégrale (2.73). Rappelons que pour tout $n \geq 1$,

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \alpha], \quad y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds.$$

Comme y_n converge uniformément vers y sur $[t_0, t_0 + \alpha]$ et que f est continue, la suite de fonctions $s \mapsto f(s, y_n(s))$ converge uniformément vers $s \mapsto f(s, y(s))$ sur $[t_0, t_0 + \alpha]$ (**Exercice** : Justifier ce résultat). De plus, grâce à la convergence uniforme de $f(s, y_n(s))$ vers $f(s, y(s))$ sur $[t_0, t_0 + \alpha]$, on peut montrer que pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$,

$$\int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Exercice : Justifier ce résultat.

Ainsi, on peut passer à la limite dans l'intégrale et on obtient que pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Ainsi y est solution de la forme intégrale (2.73). D'après la **Proposition 2.71**, y est solution de l'équation différentielle (2.72) avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. $\square$

3. LES ÉQUATIONS LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE

3.1. Équations linéaires d'ordre supérieur

Définition 3.1. une équation différentielle d'ordre n est dite linéaire si elle peut s'écrire sous la forme

$$f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = f(x),$$

où $f_n, f_{n-1}, \dots, f_1, f_0, f$ sont des fonctions continues sur un intervalle I et $f_n(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. L'équation est dite homogène si $f \equiv 0$ et non homogène sinon.

Définition 3.2. Un ensemble de fonctions $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est dit linéairement dépendant sur un intervalle I si il existe des constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$, pas toutes nulles, telles que

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

Sinon, l'ensemble est dit linéairement indépendant.

Théorème 3.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n, f_{n-1}, \dots, f_1, f_0, f$ des fonctions continues sur un intervalle I . Si $f_n(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors le problème de Cauchy

$$(3.4) \quad \begin{cases} f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

admet une unique solution y définie sur tout l'intervalle I vérifiant les conditions initiales.

Ce théorème est un résultat de type existence et unicité. Il affirme les conditions pour lesquelles le problème de Cauchy (3.4) admet une solution unique. Il est important de noter que la continuité des coefficients $f_n, f_{n-1}, \dots, f_1, f_0$ et de la fonction f est cruciale pour garantir l'existence et l'unicité de la solution. De plus, la condition $f_n(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ assure que l'équation différentielle est bien définie et que le problème de Cauchy est bien posé. La preuve sera donnée dans un contexte plus général dans la section suivante.

Théorème 3.5. Si $f_0, f_1, \dots, f_n$ et f sont continues sur un intervalle I avec $f_n(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors :

- (1) L'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n

$$f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

possède n solutions linéairement indépendantes $y_1, y_2, \dots, y_n$ sur l'intervalle I .

- (2) Toute combinaison linéaire de ces solutions

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

est aussi une solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n .

- (3) La fonction

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

où y_c est définie comme ci-dessus et y_p est une solution particulière de l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre n

$$f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = f(x)$$

est une famille n -paramétrée de solutions de l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre n , c'est-à-dire que cette expression est la solution générale de l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre n .

Démonstration. (1) La preuve de la partie (1) sera donnée dans un contexte plus général dans la section suivante.

- (2) Par hypothèse, $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n . Ainsi, pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} f_n(x)y_1^{(n)} + f_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y_1' + f_0(x)y_1 &= 0, \\ f_n(x)y_2^{(n)} + f_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y_2' + f_0(x)y_2 &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x)y_n^{(n)} + f_{n-1}(x)y_n^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y_n' + f_0(x)y_n &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant la première équation par c_1 , la deuxième par c_2 , ..., et la dernière par c_n , puis en additionnant les résultats, on obtient

$$\begin{aligned} f_n(x)(c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)} + \dots + c_ny_n^{(n)}) + f_{n-1}(x)(c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)} + \dots + c_ny_n^{(n-1)}) \\ + \dots + f_1(x)(c_1y_1' + c_2y_2' + \dots + c_ny_n') + f_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n) = 0. \end{aligned}$$

Ce dernier équation peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} f_n(x)[c_1y_1 + \dots + c_ny_n]^{(n)} + f_{n-1}(x)[c_1y_1 + \dots + c_ny_n]^{(n-1)} \\ + \dots + f_1(x)[c_1y_1 + \dots + c_ny_n]' + f_0(x)[c_1y_1 + \dots + c_ny_n] = 0. \end{aligned}$$

et ainsi,

$$f_n(x)y_c^{(n)} + f_{n-1}(x)y_c^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y_c' + f_0(x)y_c = 0,$$

ce qui montre que y_c est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n .

- (3) Soit y_p une solution particulière de l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre n . Alors, pour tout $x \in I$, on a

$$f_n(x)y_p^{(n)} + f_{n-1}(x)y_p^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y_p' + f_0(x)y_p = f(x).$$

En additionnant cette équation à l'équation obtenue dans la partie (2), on obtient

$$\begin{aligned} f_n(x)[y_c + y_p]^{(n)} + f_{n-1}(x)[y_c + y_p]^{(n-1)} \\ + \dots + f_1(x)[y_c + y_p]' + f_0(x)[y_c + y_p] = f(x), \end{aligned}$$

ce qui montre que $y = y_c + y_p$ est une solution de l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre n . □

3.1.1. Coefficients constants. On se limite maintenant aux équations linéaires avec coefficients constants. Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$(3.6) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R},$$

où f est une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$. Dans ce cas on peut trouver des solutions explicites en utilisant la méthode des équations caractéristiques. L'équation caractéristique associée à (3.6) est

$$(3.7) \quad a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0.$$

Cette équation est importante dans le sens que l'on peut commencer à chercher des solutions de (3.6) de la forme $y(x) = e^{rx}$ et on se demande alors pour quelles valeurs de r cette fonction est une solution. En substituant $y(x) = e^{rx}$ dans (3.6), on obtient

$$a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = (a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0) e^{rx} = 0.$$

Ainsi, $y(x) = e^{rx}$ est une solution de (3.6) si et seulement si r est une racine de l'équation caractéristique (3.7). Par le théorème fondamental de l'algèbre, l'équation caractéristique (3.7) admet exactement n racines complexes (comptées avec multiplicité). On peut donc trouver n solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants (3.6) de la forme $y_k(x) = e^{r_k x}$, où r_k est une racine de l'équation caractéristique (3.7). Lorsque l'on trouve les racines de l'équation caractéristique, on peut distinguer plusieurs cas selon la nature des racines

- (1) Toutes les racines sont réelles et distinctes.
- (2) Tous les racines sont réelles et certaines sont multiples.

(3) Toutes les racines sont imaginaires et distinctes.

On va regarder ces cas en détail.

3.1.2. Racines réelles et distinctes. Si les n racines de l'équation caractéristique (3.7) sont réelles et distinctes, disons $r_1, r_2, \dots, r_n$, alors les fonctions

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, \quad y_2(x) = e^{r_2 x}, \quad \dots, \quad y_n(x) = e^{r_n x}$$

sont n solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants (3.6). Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants (3.6) est donnée par

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x},$$

où $c_1, c_2, \dots, c_n$ sont des constantes arbitraires.

Exemple 3.8. Trouver la solution générale de l'équation

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0.$$

On commence par trouver l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle. L'équation caractéristique est

$$r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0.$$

Ces racines sont $r = 1, r = -1, r = -2$. Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle est

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x},$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes arbitraires.

Exemple 3.9. Trouver la solution générale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

Les racines de cette équation sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle est

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x},$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. Pour déterminer ces constantes, on utilise les conditions initiales. En substituant $x = 0$ dans la solution générale, on obtient

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1.$$

En dérivant la solution générale, on obtient

$$y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}.$$

En substituant $x = 0$ dans cette expression, on obtient

$$y'(0) = c_1 + 2c_2 = 0.$$

On a donc le système

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 + 2c_2 = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve $c_1 = 2$ et $c_2 = -1$. Ainsi, la solution du problème de Cauchy est

$$y(x) = 2e^x - e^{2x}.$$

3.1.3. Racines réelles multiples.

3.1.4. Racines imaginaires et complexes.

3.2. Solution des équations linéaires non homogènes d'ordre n avec coefficients constants

3.2.1. Méthode de coefficients indéterminés.

3.2.2. Méthode de variation des constantes.

3.2.3. *Réduction d'ordre.*

4. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE n

4.1. Équations linéaires homogènes à coefficients constants

4.2. Équations linéaires non-homogènes à coefficients constants

4.2.1. *Méthode de coefficients indéterminés.*

4.2.2. *Méthode de variation des constantes.*

4.2.3. *Équations linéaires à coefficients variables : Réduction d'ordre.*

5. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

6. SOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

6.1. Méthode d'Euler

6.2. Méthode de Heun

6.3. Méthode de Runge-Kutta

UNIV. ARTOIS, UR 2462, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE LENS (LML), F-62300 LENS, FRANCE

Email address: santiago.torooquendo@univ-artois.fr