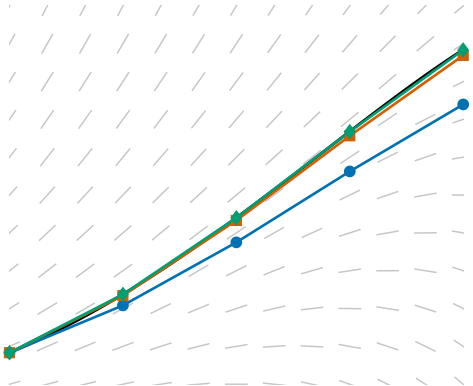
Équations différentielles et optimisation
L3 Mathématiques · Travaux pratiques

Les méthodes de Runge–Kutta

Monter en ordre sans dériver f

Introduction au TP 5



Santiago Toro Oquendo
Université d'Artois · Semestre 1, 2026–2027

Rappel du TP 3 : les méthodes de Taylor

Méthode de Taylor d'ordre n

$w_{i+1} = w_i + h\,\mathrm{T}^{(n)}(t_i, w_i)$, avec

$$\mathrm{T}^{(n)} = f + \frac{h}{2}\,f' + \frac{h^2}{6}\,f'' + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!}\,f^{(n-1)}$$

et les dérivées *totales* $f^{(k)} = \partial_t f^{(k-1)} + f\,\partial_y f^{(k-1)}$.

- méthode à un pas d'ordre n : erreur globale $\leqslant Ch^n$;
- mais il faut calculer $f', f'', \ldots$ avant de programmer.

Le prix à payer : nombre d'opérations dans $f^{(k)}$ pour $y' = 1 + t\sin(ty)$ (TP 3)

k	0	1	2	3	4	5
	4	17	76	354	1 831	10 805

Question

Peut-on garder l'ordre des méthodes de Taylor… *sans jamais dériver f* ?

Runge (1895), Heun (1900), Kutta (1901)

Remplacer les dérivées de f par des *évaluations* de f en des points intermédiaires du pas, bien choisis.

Rappel : comment montrer qu'une méthode est d'ordre p

Méthode à un pas : $w_{i+1} = w_i + h\,\varphi(t_i, w_i, h)$, où φ est la *pente utilisée*.

Erreur de consistance (TP 3)

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(t_i + h) - y(t_i)}{h} - \varphi(t_i, y(t_i), h)$$

(pente idéale − pente utilisée). Si $\tau = \mathrm{O}(h^p)$ et si φ est lipschitzienne en w, l'erreur globale est en $\mathrm{O}(h^p)$: la méthode est *d'ordre* p.

On dérive $y'(t) = f(t, y(t))$ (fonction composée) :

$$y'' = \partial_t f + y'\,\partial_y f = \underbrace{\partial_t f + f\,\partial_y f}_{f'}, \quad y''' = f'', \ \ldots$$

D'où, tout étant évalué en $(t, y(t))$:

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = y' + \frac{h}{2}\,y'' + \frac{h^2}{6}\,y''' + \ldots$$
$$= f + \frac{h}{2}\,f' + \frac{h^2}{6}\,f'' + \mathrm{O}(h^3).$$

La recette

1. développer la pente utilisée $\varphi(t, y, h)$ en puissances de h ;
2. la comparer, terme à terme, avec la pente idéale ;
3. si les termes en $h^0, \ldots, h^{p-1}$ coïncident, alors $\tau = \mathrm{O}(h^p)$.

Exemple : Euler, $\varphi = f$. Seul le terme en h^0 coïncide : $\tau = \frac{h}{2}\,f' + \mathrm{O}(h^2)$, ordre 1.

L'idée de Runge : une pente prise au bon endroit

Pour l'ordre 2, il faut une pente (tout est évalué en (t, y))

$$\varphi = f + \frac{h}{2} f' + \mathrm{O}(h^2) = f + \frac{h}{2} \partial_t f + \frac{h}{2} f \, \partial_y f + \mathrm{O}(h^2).$$

Taylor d'ordre 2 la calcule avec $\partial_t f$ et $\partial_y f$. Runge évalue plutôt f *un peu plus loin*, au bout d'un demi-pas d'Euler : en $\left(t + \frac{h}{2},\ y + \frac{h}{2} f\right)$. Taylor à deux variables, avec $a = \frac{h}{2}$ et $b = \frac{h}{2} f$:

$$f\Big(t + \frac{h}{2},\ y + \frac{h}{2} f\Big) = f + \underbrace{\tfrac{h}{2}}_{a} \partial_t f + \underbrace{\tfrac{h}{2} f}_{b} \partial_y f + \mathrm{O}(h^2).$$

C'est exactement la pente cherchée !

Taylor à deux variables

$g(t+a, y+b) = g(t,y) + a\,\partial_t g(t,y) + b\,\partial_y g(t,y) + \mathrm{O}(a^2 + b^2)$.

Ici $a^2 + b^2 = \frac{h^2}{4}\,(1 + f^2) = \mathrm{O}(h^2)$.

L'idée de Runge : une pente prise au bon endroit

Pour l'ordre 2, il faut une pente (tout est évalué en (t, y))

$$\varphi = f + \frac{h}{2} f' + \mathrm{O}(h^2) = f + \frac{h}{2} \partial_t f + \frac{h}{2} f \, \partial_y f + \mathrm{O}(h^2).$$

Taylor d'ordre 2 la calcule avec $\partial_t f$ et $\partial_y f$. Runge évalue plutôt f *un peu plus loin*, au bout d'un demi-pas d'Euler : en $(t + \frac{h}{2},\ y + \frac{h}{2} f)$. Taylor à deux variables, avec $a = \frac{h}{2}$ et $b = \frac{h}{2} f$:

$$f\Big(t + \frac{h}{2},\ y + \frac{h}{2} f\Big) = f + \underbrace{\tfrac{h}{2}}_{a} \partial_t f + \underbrace{\tfrac{h}{2} f}_{b} \partial_y f + \mathrm{O}(h^2).$$

C'est exactement la pente cherchée !

Taylor à deux variables

$g(t+a, y+b) = g(t,y) + a\,\partial_t g(t,y) + b\,\partial_y g(t,y) + \mathrm{O}(a^2 + b^2)$.

Ici $a^2 + b^2 = \frac{h^2}{4}(1 + f^2) = \mathrm{O}(h^2)$.

Conclusion

$f(t + \frac{h}{2},\ y + \frac{h}{2} f(t,y)) = \mathrm{T}^{(2)}(t,y) + \mathrm{O}(h^2)$: une seule évaluation de f, au bon endroit, remplace f et f'.

Erreur de consistance en $\mathrm{O}(h^2)$: ordre 2.

Avec un pas αh au lieu de $\frac{h}{2}$, on trouverait $f + \alpha h\, f' + \mathrm{O}(h^2)$: il faut alors mélanger avec $k_1 = f$ (la famille RK2, plus loin).

La méthode du point milieu

Méthode du point milieu

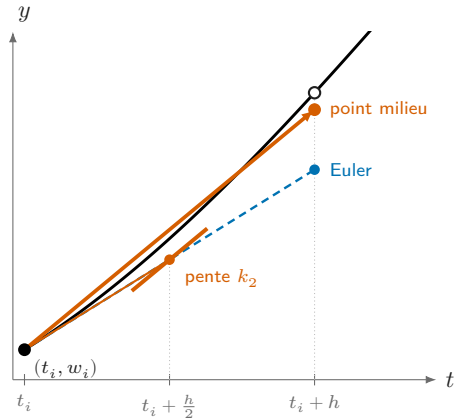
$$k_1 = f(t_i, w_i) \qquad \text{(début)}$$

$$k_2 = f\Big(t_i + \frac{h}{2},\ w_i + \frac{h}{2}\,k_1\Big) \qquad \text{(milieu)}$$

$$w_{i+1} = w_i + h\,k_2$$

Sur la figure : $f(t,y) = y - t^2 + 1$, $h = 1$, départ $(0;0{,}5)$.

$k_1 = f(0;0{,}5) = 0{,}5 - 0 + 1 = 1{,}5$	pente au début
$0{,}5 + \frac{1}{2} \times 1{,}5 = 1{,}25$	demi-pas d'Euler
$k_2 = f(0{,}5;1{,}25) = 1{,}25 - 0{,}25 + 1 = 2$	pente au milieu
$w_1 = 0{,}5 + 1 \times 2 = 2{,}5$	*tout* le pas avec k_2



Euler donne 2, le point milieu 2,5, pour $y(1) \approx 2{,}64$ (rond blanc).

Fil rouge, $h = 0{,}2$: $w_1 = 0{,}828$, $w_2 = 1{,}21136$ (Euler : 0,8 et 1,152).

La famille des méthodes de Runge–Kutta d'ordre 2

Méthode RK2 de paramètre $\alpha \in]0, 1]$

$$k_1 = f(t_i, w_i),$$
$$k_2 = f(t_i + \alpha h,\ w_i + \alpha h\, k_1),$$
$$w_{i+1} = w_i + h\left[\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)k_1 + \frac{1}{2\alpha}\, k_2\right].$$

α	poids (b_1, b_2)	méthode	erreur en $t = 2$
$\frac{1}{2}$	$(0, 1)$	point milieu	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$
$\frac{2}{3}$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$	Ralston	$3{,}4 \cdot 10^{-2}$
1	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	Euler modifiée (TP 2)	$7{,}2 \cdot 10^{-2}$
		Euler (rappel)	$4{,}4 \cdot 10^{-1}$

d'après Burden & Faires, *Numerical Analysis*, tableau 5.6 ; $h = 0{,}2$

- famille présentée par Demailly (chap. VIII) ;
- deux évaluations de f par pas ;
- toutes d'ordre 2 (calcul à la page suivante) ;
- impossible d'atteindre l'ordre 3 avec deux évaluations (Burden & Faires, ex. 5.4.30 ; voir plus loin).

Attention aux noms

« Méthode de Heun » désigne l'Euler modifiée chez Demailly, mais une méthode *d'ordre 3* chez Burden & Faires (plus loin).

Pourquoi l'ordre 2 ? Le calcul pas à pas

Deux évaluations, avec des poids b_1, b_2 *quelconques* (tout est évalué en (t, y)) :

$$k_1 = f, \quad k_2 = f(t + \alpha h,\ y + \alpha h\, k_1), \quad \varphi = b_1 k_1 + b_2 k_2.$$

① **Développer** k_2 (Taylor à deux variables, $a = \alpha h$, $b = \alpha h\, f$) :

$$k_2 = f + \alpha h\, \partial_t f + \alpha h f\, \partial_y f + \mathrm{O}(h^2) = f + \alpha h\, f' + \mathrm{O}(h^2).$$

② **Développer la pente utilisée** (on remplace k_1 et k_2) :

$$\begin{aligned} \varphi &= b_1 f + b_2 (f + \alpha h\, f') + \mathrm{O}(h^2) \\ &= (b_1 + b_2)\, f + b_2 \alpha\, h\, f' + \mathrm{O}(h^2). \end{aligned}$$

③ **Soustraire de la pente idéale** $f + \frac{1}{2} h\, f' + \mathrm{O}(h^2)$:

$$\tau = (1 - b_1 - b_2)\, f + \left(\frac{1}{2} - b_2 \alpha \right) h\, f' + \mathrm{O}(h^2).$$

Conditions d'ordre 2

Pour toute f, $\tau = \mathrm{O}(h^2)$ si et seulement si

$$b_1 + b_2 = 1 \quad \text{et} \quad b_2\, \alpha = \frac{1}{2},$$

soit $b_2 = \frac{1}{2\alpha}$ et $b_1 = 1 - \frac{1}{2\alpha}$: c'est la famille RK2.

- $b_1 + b_2 = 1$ seule : $\tau = \mathrm{O}(h)$, la méthode est *consistante* (ordre 1) ;
- $\alpha = \frac{1}{2}$: $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, le point milieu ;
- $\alpha = 1$: $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$, l'Euler modifiée.

Vérification avec SymPy, et pourquoi pas l'ordre 3

Dans le TP, SymPy refait ce calcul pour *toute* fonction f :

```
fs = sp.Function("f")   # f inconnue
F = fs(ts, ys)
T2 = F + hs/2 * (sp.diff(F, ts)
                 + F * sp.diff(F, ys))
phi_alpha = ...         # à vous !
sp.series(phi_alpha - T2, hs, 0, 2)
```

Résultat : $\Phi_\alpha - \mathrm{T}^{(2)} = 0 + \mathrm{O}(h^2)$, pour tout α.

Si f est affine en (t, y), le développement de k_2 est exact : toutes les RK2 donnent les mêmes w_i (Burden & Faires, ex. 5.4.27).

Et l'ordre 3 ? Un seul exemple suffit : $y' = y$, donc $f(t, y) = y$ et $y(t + h) = \mathrm{e}^h\, y(t)$.

- pente idéale : $\dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h}\, y = \left(1 + \dfrac{h}{2} + \dfrac{h^2}{6} + \ldots\right) y$;
- pente de RK2 : $k_1 = y$, $k_2 = y + \alpha h\, y$, et $\varphi = (b_1 + b_2)\, y + b_2 \alpha\, h\, y = \left(1 + \dfrac{h}{2}\right) y$;
- donc $\tau = \dfrac{h^2}{6}\, y + \mathrm{O}(h^3)$: jamais en $\mathrm{O}(h^3)$.

Plus généralement

Pour $y' = y$, k_j vaut y fois un polynôme de degré $\leqslant j - 1$ en h. Avec s évaluations, φ est de degré $\leqslant s - 1$ en h : le terme $\frac{h^s}{(s+1)!}\, y$ de la pente idéale reste dans τ. Ordre $\leqslant s$.

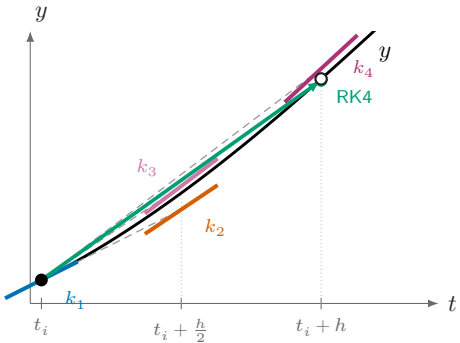
La méthode de Runge–Kutta classique (RK4)

RK4 : quatre évaluations de f par pas

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, w_i) \\
k_2 &= f\left(t_i + \tfrac{h}{2},\ w_i + \tfrac{h}{2}\,k_1\right) \\
k_3 &= f\left(t_i + \tfrac{h}{2},\ w_i + \tfrac{h}{2}\,k_2\right) \\
k_4 &= f(t_i + h,\ w_i + h\,k_3) \\
w_{i+1} &= w_i + \tfrac{h}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

Un pas $h = 1$ depuis $(0;0{,}5)$, avec $f(t,y) = y - t^2 + 1$:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(0;0{,}5) = 1{,}5, \\
k_2 &= f(0{,}5;\ 0{,}5 + \tfrac{1}{2}\times 1{,}5) = f(0{,}5;1{,}25) = 2, \\
k_3 &= f(0{,}5;\ 0{,}5 + \tfrac{1}{2}\times 2) = f(0{,}5;1{,}5) = 2{,}25, \\
k_4 &= f(1;\ 0{,}5 + 1\times 2{,}25) = f(1;2{,}75) = 2{,}75, \\
w_1 &= 0{,}5 + \tfrac{1}{6}\,(1{,}5 + 2\times 2 + 2\times 2{,}25 + 2{,}75) = 2{,}625
\end{aligned}
$$



k_1 : pente au début ; k_2 et k_3 : au milieu, après un demi-pas avec k_1, puis avec k_2 ; k_4 : à la fin, après un pas entier avec k_3. RK4 donne $2{,}625$ pour $y(1) \approx 2{,}641$ (point milieu : $2{,}5$).

Poids $1, 2, 2, 1$ comme Simpson (voir plus loin) ; ordre 4 si $y \in \mathcal{C}^5$.

RK4 sur l'exemple fil rouge

$y' = y - t^2 + 1$, $y(0) = 0{,}5$, avec $h = 0{,}2$:

t_i	w_i (RK4)	$y(t_i)$	erreur
0,4	1,2140762	1,2140877	$1{,}1 \cdot 10^{-5}$
0,8	2,1272027	2,1272295	$2{,}7 \cdot 10^{-5}$
1,2	3,1798942	3,1799415	$4{,}7 \cdot 10^{-5}$
1,6	4,2834095	4,2834838	$7{,}4 \cdot 10^{-5}$
2	5,3053630	5,3054720	$1{,}1 \cdot 10^{-4}$

d'après Burden & Faires, *Numerical Analysis*, tableau 5.8

Erreur en $t = 2$, même pas $h = 0{,}2$:

méthode	évaluations / pas	erreur
Euler	1	$4{,}4 \cdot 10^{-1}$
point milieu	2	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$
Heun d'ordre 3	3	$4{,}6 \cdot 10^{-4}$
RK4	4	$1{,}1 \cdot 10^{-4}$

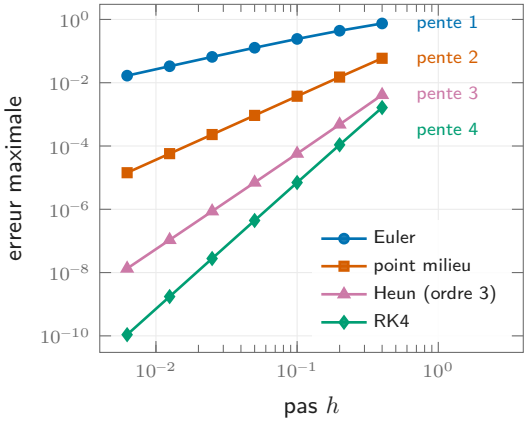
Taylor d'ordre 4 (TP 3) : $8{,}3 \cdot 10^{-5}$. Même précision que RK4… mais il fallait calculer f', f'' et f'''.

Vérifier l'ordre : l'échelle log-log

Comme aux TP 2 et 3 : si $\mathrm{E}(h) \approx \mathrm{C}\, h^p$, les points $(h, \mathrm{E}(h))$ s'alignent sur une *droite de pente* p, et $\log_2 \frac{\mathrm{E}(h)}{\mathrm{E}(h/2)} \approx p$.

méthode	étages	ordre observé
Euler	1	0,99
point milieu	2	2,00
Heun d'ordre 3	3	3,00
RK4	4	4,00

Ici, chaque évaluation de f par pas « rapporte » un ordre.



Tableaux de Butcher

Méthode de Runge–Kutta explicite à s étages

$$k_j = f\Big(t_i + c_j h,\ w_i + h\sum_{l<j} a_{jl}\, k_l\Big) \quad (j = 1, \dots, s), \qquad w_{i+1} = w_i + h\sum_{j=1}^{s} b_j\, k_j.$$

Le *tableau de Butcher* :

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_s & a_{s1} & \cdots & \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

Euler

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

point milieu

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Heun d'ordre 3

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

RK4

avec $c_1 = 0$ et $c_j = \sum_l a_{jl}$.

Une seule fonction Python `rk_explicite(A, b, c, f, t0, T, y0, N)` pour toutes ces méthodes : il suffit de changer le tableau.

Lire l'ordre sur le tableau

Théorème (Butcher ; admis)

La méthode est d'ordre $\geqslant p$ si et seulement si elle vérifie les conditions des lignes 1 à p :

1. $\sum b_i = 1$ (consistance)
2. $\sum b_i c_i = \frac{1}{2}$
3. $\sum b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$, $\sum b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$
4. $\sum b_i c_i^3 = \frac{1}{4}$, $\sum b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8}$, $\sum b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12}$, $\sum b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{24}$

En NumPy : `b @ c`, `b @ A @ c`, `b @ A @ A @ c`…

Combien d'étages pour l'ordre p ?

étages s	ordre maximal
1, 2, 3, 4	s
5, 6, 7	$s-1$
8, 9	$s-2$
$\geqslant 10$	$\leqslant s-3$

d'après Burden & Faires, *Numerical Analysis*, tableau 5.9 (Butcher)

Au-delà de 4, chaque ordre supplémentaire coûte *plus* d'une évaluation : RK4 est le meilleur compromis.

D'où viennent les conditions d'ordre ?

① Les lignes 1 et 2 : le même calcul que pour RK2. On évalue k_j en $(t + c_j h,\ y + h\sum_l a_{jl} k_l)$, et comme $k_l = f + \mathrm{O}(h)$ et $\sum_l a_{jl} = c_j$:

$$h \sum_l a_{jl}\, k_l = c_j h\, f + \mathrm{O}(h^2).$$

Donc (Taylor à deux variables) $k_j = f + c_j h\, f' + \mathrm{O}(h^2)$, puis

$$\varphi = \Big(\sum_j b_j\Big) f + \Big(\sum_j b_j c_j\Big) h\, f' + \mathrm{O}(h^2).$$

Avec la pente idéale $f + \frac{1}{2} h\, f' + \ldots$: $\sum b_j = 1$ et $\sum b_j c_j = \frac{1}{2}$.

C'est pourquoi on impose $c_j = \sum_l a_{jl}$: la prédiction $y + h\sum_l a_{jl} k_l$ approche alors $y(t + c_j h)$, la solution à l'instant où l'on évalue f.

② Si $f(t, y) = g(t)$: une formule de quadrature. Alors $k_j = g(t + c_j h)$: on compare la pente idéale $\int_0^1 g(t + \theta h)\, d\theta$ à la pente utilisée $\sum_j b_j\, g(t + c_j h)$.

En développant $g(t + \theta h)$ en puissances de h : $\tau = \mathrm{O}(h^p)$ pour toute g si et seulement si

$$\sum_j b_j c_j^k = \int_0^1 \theta^k\, d\theta = \frac{1}{k+1}, \quad k = 0, \ldots, p-1.$$

Ce sont les conditions $\sum b_i c_i^k$ du théorème ; les autres (avec les a_{ij}) viennent de la dépendance en y.

RK4 et Simpson

$c = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, donc $k_2 = k_3 = g(t + \frac{h}{2})$ et $\varphi = \frac{1}{6}[g(t) + 4\, g(t + \frac{h}{2}) + g(t + h)]$.

Exemple : l'ordre de la méthode de Heun d'ordre 3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

$c = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $b = (\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4})$ et

$$\mathrm{A}c = \left(0,\ \tfrac{1}{3} \times 0,\ 0 \times 0 + \tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{3}\right) = \left(0,\ 0,\ \tfrac{2}{9}\right).$$

Comme $c_1 = 0$ et $b_2 = 0$, seul le terme $i = 3$ compte dans toutes les sommes, sauf la première.

ligne	condition	calcul	
1	$\sum b_i = 1$	$\frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4} = 1$	✓
2	$\sum b_i c_i = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$	✓
3	$\sum b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$	✓
	$\sum b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$	$b \cdot (\mathrm{A}c) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{6}$	✓
4	$\sum b_i c_i^3 = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} \times \frac{8}{27} = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{4}$	✗

Conclusion

Lignes 1 à 3 vérifiées, ligne 4 non : la méthode est *exactement* d'ordre 3. Sur le graphique log-log, on observait la pente $3{,}00$.

Dans le TP, `ordre_tableau(A, b, c)` fait ces calculs pour n'importe quel tableau.

Ce que vous allez programmer

```python
def rk4(f, t0, T, y0, N):
    # comme euler (TP 2)
    for i in range(N):
        k1 = f(t[i], w[i])
        k2 = ...
        k3 = ...
        k4 = ...
        w[i + 1] = ...
    return t, w
```

Puis `rk2(f, t0, T, y0, N, alpha)` pour toute la famille RK2.

```python
def rk_explicite(A, b, c, f, t0, T, y0, N):
    ...
    for i in range(N):
        k = np.zeros(s)
        for j in range(s):
            k[j] = ...  # A[j, :j] @ k[:j]
        w[i + 1] = ...  # b @ k
```

Systèmes : les mêmes formules avec des *vecteurs* : `W = np.zeros((N + 1, m))`.

Précision et coût

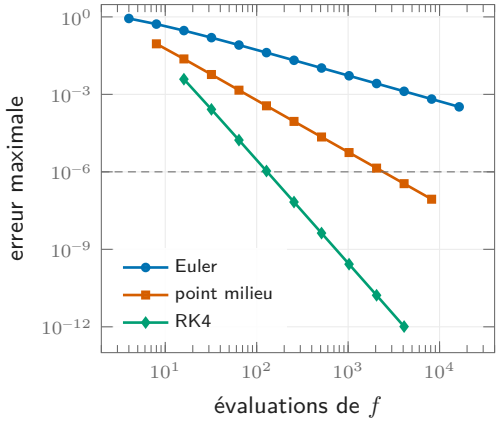
Le travail, c'est le *nombre d'évaluations de f*. À coût égal (20 évaluations sur $[0;0{,}5]$) :

	Euler $h = 0{,}025$	Euler mod. $h = 0{,}05$	RK4 $h = 0{,}1$
$w \approx y(0{,}5)$	$1{,}4147264$	$1{,}4250141$	$1{,}4256384$
erreur	$1{,}1 \cdot 10^{-2}$	$6{,}3 \cdot 10^{-4}$	$9{,}7 \cdot 10^{-7}$

d'après Burden & Faires, *Numerical Analysis*, tableau 5.10 ; $y(0{,}5) = 1{,}4256394$

Évaluations de f pour une erreur maximale $< \varepsilon$ sur $[0, 2]$:

ε	Euler	point milieu	RK4
10^{-4}	$53\,889$	244	44
10^{-6}	$\approx 5{,}4 \cdot 10^{6}$	$2\,420$	132



Systèmes d'EDO

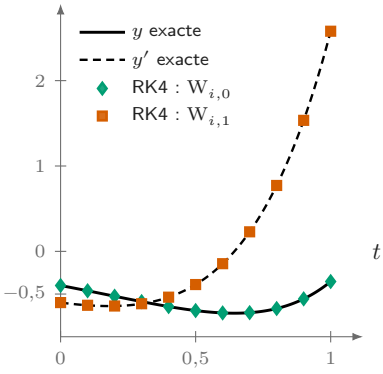
Pour $\mathrm{Y}' = \mathrm{F}(t, \mathrm{Y})$, $\mathrm{Y} \in \mathbb{R}^m$: mêmes formules, avec des pentes $k_j \in \mathbb{R}^m$.

Une équation d'ordre 2 devient un système. Pour $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^{2t} \sin t$:

1. on pose $\mathrm{U} = (\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1) = (y, y')$ (numérotés comme en Python), donc $\mathrm{U}' = (y', y'')$;
2. on résout l'équation en y'' : $y'' = \mathrm{e}^{2t} \sin t + 2y' - 2y$;
3. on écrit tout avec les composantes de U :

$$\mathrm{U}' = \mathrm{F}(t, \mathrm{U}) = \begin{pmatrix} \mathrm{U}_1 \\ \mathrm{e}^{2t} \sin t + 2\mathrm{U}_1 - 2\mathrm{U}_0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{U}(0) = (-0{,}4; -0{,}6).$$

Solution exacte : $y(t) = 0{,}2\,\mathrm{e}^{2t}(\sin t - 2\cos t)$. RK4 avec $h = 0{,}1$: $\mathrm{W}_{10} = (-0{,}3533989\,;\, 2{,}5787663)$, pour $y(1) = -0{,}35339436$; erreur maximale sur y : $4{,}8 \cdot 10^{-6}$.
d'après Burden & Faires, *Numerical Analysis*, § 5.9, exemple 1 et tableau 5.20



★ Stabilité : d'où vient R ?

Équation test $y' = \lambda y$ avec $\lambda < 0$:
$y(t) = y_0\,\mathrm{e}^{\lambda t} \to 0$. On note $z = h\lambda$.

Euler. $w_{i+1} = w_i + h\,\lambda w_i = (1+z)\,w_i$.

Point milieu.

$$k_1 = \lambda w_i,$$
$$k_2 = \lambda\Big(w_i + \frac{h}{2}\,k_1\Big) = \lambda\Big(1 + \frac{z}{2}\Big)\,w_i,$$
$$w_{i+1} = w_i + h\,k_2 = \Big(1 + z + \frac{z^2}{2}\Big)\,w_i.$$

Dans les deux cas, $w_{i+1} = \mathrm{R}(z)\,w_i$, donc $w_i = \mathrm{R}(z)^i\,w_0$: les w_i restent bornés (comme y) si et seulement si $|\mathrm{R}(h\lambda)| \leqslant 1$.

Le calcul pour le point milieu ($z = x$ réel) :

$$\mathrm{R}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} = \frac{(1+x)^2 + 1}{2} > 0,$$

$$|\mathrm{R}(x)| \leqslant 1 \iff x\Big(1 + \frac{x}{2}\Big) \leqslant 0 \iff x \in [-2, 0].$$

Pour $\lambda = -10$: $-10\,h \geqslant -2$, soit $h \leqslant 0{,}2$ (comme Euler).

Pourquoi le polynôme de Taylor de e^z ?
À s étages, R est un polynôme de degré $\leqslant s$. À l'ordre s, l'erreur d'un pas $(\mathrm{e}^z - \mathrm{R}(z))\,y$ est en $\mathrm{O}(h^{s+1})$: R coïncide avec e^z jusqu'au terme en z^s, donc $\mathrm{R}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^s}{s!}$.

Pour RK4 : à vous, avec SymPy (exercice 10 ; Taller 5, ex. 10).

★ Stabilité : les régions de stabilité

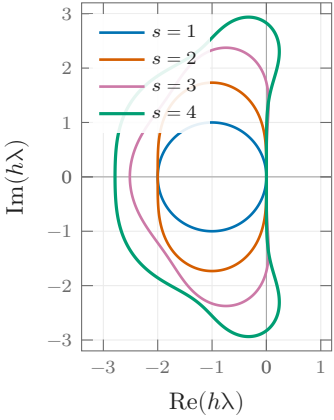
Pour une méthode à $s \leqslant 4$ étages et d'ordre s :

$$w_{i+1} = \mathrm{R}(h\lambda)\, w_i, \quad \mathrm{R}(z) = 1 + z + \cdots + \frac{z^s}{s!},$$

le même R que la méthode de Taylor d'ordre s (TP 3).

Stable si $|\mathrm{R}(h\lambda)| \leqslant 1$:

s	intervalle réel	$\lambda = -10$
1	$[-2{,}000, 0]$	$h \leqslant 0{,}2000$
2	$[-2{,}000, 0]$	$h \leqslant 0{,}2000$
3	$[-2{,}513, 0]$	$h \leqslant 0{,}2513$
4	$[-2{,}785, 0]$	$h \leqslant 0{,}2785$



Régions de stabilité $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{R}(z)| \leqslant 1\}$ (intérieur des courbes).

★ Proies et prédateurs : une quantité conservée

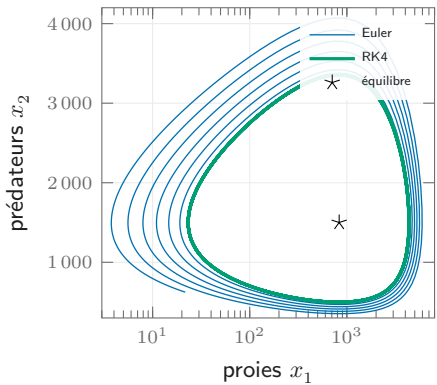
$x_1' = k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2$, $x_2' = k_3 x_1 x_2 - k_4 x_2$
$(k_1 = 3,\ k_2 = 0{,}002,\ k_3 = 0{,}0006,\ k_4 = 0{,}5\,;$
$x_1(0) = 1000,\ x_2(0) = 500)$. d'après Burden & Faires, *Numerical Analysis*, § 5.9, exercice 9

$\mathrm{H} = k_3 x_1 - k_4 \ln x_1 + k_2 x_2 - k_1 \ln x_2$ est *constante* le long des solutions. En effet, $x_1' = x_1(k_1 - k_2 x_2)$ et $x_2' = x_2(k_3 x_1 - k_4)$, donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{H} &= \Big(k_3 - \frac{k_4}{x_1}\Big)x_1' + \Big(k_2 - \frac{k_1}{x_2}\Big)x_2' \\ &= (k_3 x_1 - k_4)(k_1 - k_2 x_2) + (k_2 x_2 - k_1)(k_3 x_1 - k_4) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Sur $[0, 40]$, $\max|\mathrm{H} - \mathrm{H}_0|$ vaut :

- Euler, $h = 0{,}01$ (4 000 évaluations) : $9{,}1 \cdot 10^{-1}$;
- RK4, $h = 0{,}1$ (1 600 évaluations) : $1{,}0 \cdot 10^{-3}$.



Avec Euler, la trajectoire spirale vers l'extérieur ; avec RK4, elle reste fermée.

En résumé

Méthode	Évaluations par pas	Dérivées de f ?	Ordre
Euler	1	non	1
RK2 (point milieu, Euler modifiée…)	2	non	2
Heun d'ordre 3	3	non	3
RK4	4	non	4
Taylor d'ordre n	n $(f, \dots, f^{(n-1)})$	oui	n

- Runge–Kutta : des évaluations de f en des points intermédiaires remplacent les dérivées de Taylor.
- Tableau de Butcher (c, A, b) : l'ordre se lit sur des conditions algébriques.
- À coût égal (évaluations de f), une méthode d'ordre élevé est bien plus précise.
- Mêmes formules pour les systèmes : RK4 est la méthode « reine » des méthodes à un pas.

Au travail !

Au programme du TP 5

1. le point milieu à la main, puis `rk2(..., alpha)` ;
2. pourquoi l'ordre 2 : un développement avec SymPy ;
3. `rk4` et son ordre ;
4. tableaux de Butcher : `rk_explicite` et `ordre_tableau` ;
5. précision et coût ; RK4 pour un système ;
★ pour aller plus loin : stabilité, proies et prédateurs.

En fin de séance

File → **Download** : votre travail n'est enregistré que dans le navigateur.



storoo.fr/TP_EDO
dossier TP5, fichier TP5_RungeKutta.ipynb